中国科学技术大学
2020–2021学年实变函数期中考试

姓名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿　　学号：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

要求：请将所有的答案写在答题纸上。在试卷和每张答题纸上写上姓名和学号。试卷包住答题纸，一起提交！

1. (10分) 设$\{f_n\}$是$L^1([0,1])$中的一列非负函数，满足$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$和$\int_{1/n}^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \le 1/n$，对全部的$n \ge 1$。若$g(x) = \sup_n f_n(x)$，证明$g \notin L^1([0,1])$。（注意：$g$的定义中不是$\limsup$。）

2. (15分) 计算以下Lebesgue积分的极限并解释计算的步骤：

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^k x^n \left(1 - \frac{x}{k}\right)^k \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. (20分) 设$f : [0,1] \to \mathbb{R}$是连续的且满足

$$\min_{x\in[0,1]} f(x) = 0.$$

假设对任意的$0 \le a < b \le 1$我们有

$$\int_a^b (f(x) - \min_{y\in[a,b]} f(y))\,\mathrm{d}x \le \frac{1}{2}(b-a).$$

证明：对任意的$\lambda \ge 0$，

$$|\{x : f(x) > \lambda + 1\}| \le \frac{1}{2}|\{x : f(x) > \lambda\}|.$$

4. (15分) 令$m(E) < \infty$，$\{f_n\}$是E上的可测函数列，f是E上的可测函数. 证明：f_n在E上依测度收敛于f当且仅当f_n的任意子序列f_{n_k}都可以从中再找到一个子序列$f_{n_{k_i}}$在E中几乎处处收敛于f.

5. （10分）在$[0,1]\times[0,2]$中构造一个不可测集合E使得$1\leq m_*(E)\leq 2$。（提示：对χ_E用Fubini定理。）

6. （10分）设$f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$是一个非负可积函数，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是非负严格单调函数。能否证明$g\circ f$ 是可积函数？请详细解释原因。

7. （20分）设ω_d 为$\mathbb{R}^d$ 中单位球$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_d):x_1^2+x_2^2+\cdots x_d^2<1\}$的体积，则$0<\omega_d<2^d$且$m(\partial B)=0$.

   (a). 证明单位球B可以写成无交并$B=E\cup\left\{\cup_{j=1}^{\infty}Q_j\right\}$。其中$E$是零测集，$\{Q_j\}$ 是互不相交的开方体。

   (b). 证明单位方体$Q=\{(x_1,x_2,\cdots,x_d):0\leq x_j\leq 1,\quad 1\leq j\leq d\}$ 可以写成无交并$Q=F\cup\left\{\cup_{j=1}^{\infty}B_j\right\}$。其中$F$是零测集，$\{B_j\}$ 是互不相交的开球。