中国科学技术大学
2020–2021学年实变函数期末考试

授课教师：王兵、郭经纬

姓名：________________ 学号：________________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								

要求：请将所有的答案写在答题纸上。在试卷和每张答题纸上写上姓名和学号。试卷包住答题纸，一起提交！

1. (15分) 请写出上课时间、授课老师的名字，和三个包含人名的实分析概念或定理。

2. (10分) 判断对错并给出理由

   (1). $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一列$\mathbb{R}^n$上一致有界的可积函数。假如这串函数几乎处处收敛到f，则存在一个子列依测度收敛到f。

   (2). $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一列$\mathbb{R}^n$上一致有界的非负可积函数。假如该函数列一致收敛到一个非负可积函数f，则存在子列$\{f_{i_k}\}_{k=1}^{\infty}$满足$\lim_{k\to\infty}\int f_{i_k}=\int f$.

3. (15分) 设$E\subset\mathbb{R}$且$0<m(E)<\infty$，$f(x)$在$\mathbb{R}$上非负可测。则$f\in L^1(\mathbb{R})$当且仅当$g(x)=\int_E f(x-t)\,\mathrm{d}t$在$\mathbb{R}$上可积。

4. (15分) 假设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是绝对连续的，那么

   (1). f将零测集映射到零测集。

   (2). f将可测集映射到可测集。

5. (15分) 若$f\in L^1(\mathbb{R}^d)$且f不恒等于0，试证明Hardy–Littlewood极大函数$f^*\notin L^1(\mathbb{R}^d)$。

6. (15分) 定义在$\mathbb{R}$上的周期为2的函数H由下式给出

$$H(x)=\begin{cases}0, & 若2k-1<x\le 2k,\\ 1, & 若2k<x\le 2k+1,\end{cases}$$

   这里$k\in\mathbb{Z}$。请证明下列函数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}H(2^n x)$$

   不是$[0,1]$上的有界变差函数。[提示：考虑由分点$x_q=\frac{q}{2^k}$ (这里k为某任意固定的自然数)构成的区间$[0,1]$的划分。]

装订线 答题时不要超过此线

7. (15分) 在实分析期中改卷的过程中，助教看到李四同学在第三题的证明中使用了以下错误结论："对于$[0,1]$ 上的连续函数f，可将$[0,1]$ 区间分成可数多个子区间的并，使得f 在每个子区间上是单调的。"本题我们来构造一个$[0,1]$ 上的连续函数，且满足：在任何一个$[0,1]$ 的子区间上都不单调。

(1)(5分) 证明：存在一个$[0,1]$ 的可测子集A, 使得：对任何一个$[0,1]$ 的子区间I 均有$0 < m(A\bigcap I) < m(I)$。[提示：用类似Cantor集合的构造方法构造这样的集合。]

(2)(10分)构造一个$[0,1]$ 上的连续函数，且满足：在任何一个$[0,1]$ 的子区间上都不单调。提示：利用第(1)小问结论和微积分基本定理。