2021 实分析(H)期中

授课教师：任广斌 时间：2 小时

1. (15')叙述$\mathbb{R}^n$中 Lebesgue 可测集的定义。

2. (15')叙述$\mathbb{R}^n$中的 Fatou 引理和 Lebesgue 控制收敛定理，并用 Fatou 引理证明 Lebesgue 控制收敛定理。

3. (20')$E \subset \mathbb{R}$是 Lebesgue 可测的，且满足$m(E) < \infty$，记$L(E,\mathbb{R})$为E上全体几乎处处有限的可测函数模去几乎处处相等所构成的等价类，对任意的$f,g \in L(E,\mathbb{R}^n)$，定义

$$d(f,g) = \int_E \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\mathrm{d}x$$

试证明：$f_n, f \in L(E,\mathbb{R})$，则$f_n$依测度收敛到$f$当且仅当

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$$

4. (20')f为$(0,1)$上可积的实值函数，且满足$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = A \in \mathbb{R}$，试证明：

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 f(x)x^n \mathrm{d}x = A$

5. (10')用换元$x = \alpha t$计算

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\cos x - \cos\alpha}}$$

6. (10')记$\mathbb{Q} = \{r_n\}$为所有有理数，考虑$f: \mathbb{R} \to [0,+\infty]$由下定义：

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k |x-r_k|}, x \notin \mathbb{Q} \\ \infty, x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

试证明：$m(\{x \in \mathbb{R}: f(x) > 1\}) < \infty$

7. (10')设G为$\mathbb{R}$的真子群（相对于加法），且G是 Lebesgue 可测的，用 Steinhaus 定理证明$m(G) = 0$.