2021 春实分析(H)期末

授课教师：任广斌 时间：2 小时 30 分钟

1.$\mathbb{R}$上的广义 Riemann 积分是否一定 Lebesgue 可积？反之是否成立？（举例说明）

2.设$f \in \mathrm{BV}[0,1]$，集合$E=\{x \in [0,1] | f'(x)=\infty\}$是否 Lebesgue 可测？

3.设$f,g \in \mathrm{AC}[0,1]$且$g([0,1]) \subset [0,1]$，是否一定有$f \circ g \in \mathrm{AC}[0,1]$？

4.设$f \in L(E)$，证明：

$$\int_E |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} m(\{x \in E | f(x) > \lambda\}) \mathrm{d}\lambda$$

5.设有抽象正测度μ，定义

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mu)} = \inf\{M>0 | \mu(\{x \in \mathbb{R} | |f(x)| > M\}) = 0\}$$

(1) 对$f \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$和$\mathbb{R}$上 Lebesgue 测度$m$，证明：

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R},m)} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

(2) 对狄拉克测度δ_0，举例说明(1)不对；

(3) 设$f \in L^\infty(\mathbb{R})$，是否一定存在$g \in C(\mathbb{R})$使得$f = g\ a.e.\ x \in \mathbb{R}$？

6.设$\{f_k\}$为E上可数可测函数列，满足

$$\int_E f_k^2 \mathrm{d}x \le 2021, \int_E f_k f_j \mathrm{d}x = 0, \forall k \ne j$$

证明：

$$\sum_{k=1}^{n^2} \int_E \left(\frac{1}{n^\beta} f_k\right)^2 \mathrm{d}x \le \frac{2021}{n^{2\beta-2}}, \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n^2} \left(\frac{1}{n^\beta} f_k\right)^2 = 0\ a.e.\ x \in \mathbb{R}$$

7.设$f,g\in\mathcal{L}^+(E)$，满足

$$m\{x\in E||g(x)>t\}\leq\frac{1}{t}\int\limits_{\{x\in E||g(x)>t\}}f(x)\mathrm{d}x$$

对$\forall p\in(1,+\infty)$，证明：

$$\left(\int\limits_E\big(g(x)\big)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{p}{p-1}\left(\int\limits_E\big(f(x)\big)^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

8.设E零测，开集列$\mathcal{O}_k\supset E$，$m(\mathcal{O}_k)<\frac{1}{2^k}$，令

$$\Phi(x)=\int_0^x\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{\mathcal{O}_k}(t)\mathrm{d}t$$

证明$\Phi(x)\in C(\mathbb{R})$，且$\Phi'(x)=0,x\in E$

9.设f是$\mathbb{R}^2$上的可测函数，且$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}=1$。通过估计

$$\int\limits_{|x|\leq 1}\int\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{f(y)}{|y-x|}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

证明存在$|x_0|\leq 1$，使得$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(y)}{|y-x_0|}\mathrm{d}y<2021$

10.设$f(x)$在$\mathbb{R}$上处处可导，且$f\in L^2(\mathbb{R}),f'\in L^2(\mathbb{R})$。证明：

(1)任给闭区间$[a,b]$，有$f\in AC[a,b]$；

(2)$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$