几何学基础期中考试题

一、判断题

$a)$一条长为2021厘米的线段与一条长为π米的线段可公度;

$b)$希尔伯特几何公理体系规定直角就是90°的角;

$c)$两个反射的复合一定是平移;

$d)$三个反射的复合不可能是平移;

$e)E^3$上的加法和外积满足结合律;

$f)E^2$上的刚体变换群是交换群;

$g)\phi_i(i=1,2,3)$为E^3上的非恒等刚体变换，其中$\phi_{1,3}$为旋转，ϕ_2为平移，则$\phi_1\circ\phi_2\circ\phi_3$一定是非平移刚体变换;

$h)$刚体变换保内积，即对刚体变换ϕ, 总有$\langle u,v\rangle=\langle\phi(u),\phi(v)\rangle$成立;

$i)$非空集合上的等价关系和集合的分拆一一对应;

$j)$非空集合上必有距离函数.

二、$a)$求由P_1(0，1，2)，$P_2(1,3,0),P_3(0,-4,4),P_4(3,-3,2)$构成的四面体体积;

$b)$求证：若$u\times v+20v\times w-21w\times u=0$, 则$u,v,w$共面.

三、已知$u=(1,2,3),v=(0,1,2),w=(-1,0,1)$, 计算：

$a)u+v-w$;

$b)\langle u,v\rangle$和$v\times w$;

$c)$三角形uvw中以u为顶点的角的余弦值.

四、$a)$求证：$u\times(v\times w)=\langle u,w\rangle\cdot v-\langle u,v\rangle\cdot w$;

$b)$求证：$\langle v_1\times v_2,v_3\times v_4\rangle=\langle v_1,v_3\rangle\cdot\langle v_2,v_4\rangle-\langle v_1,v_4\rangle\cdot\langle v_2,v_3\rangle$.

五、求满足下列条件的直线或平面的参数方程

$a)$过$(3,-1,4),(1,0,-3)$且垂直于平面：$2x+5y+z=0$的平面;

$b)$过$(3,-1,4)$且垂直于平面：$2x+5y+z=0$的直线.

六、我们定义在E^3上的刚体变换ϕ满足：$\phi(x,y,z)=(x,y,z)\cdot A+b$, 其中$A$为非恒等矩阵，$b$为非零向量;

$a)$证明：对$\forall n\in\mathbb{N},\phi_n(x,y,z)=(x,y,z)\cdot A^n+nb$均为刚体变换, 其中$A^n$表示$n$个$A$相乘, nb表示n个b相加;

$b)$问ϕ_n是否等于ϕ^n, 其中ϕ^n表示n个ϕ的复合, 并说明理由;

$c)$求证$\psi(x,y,z)=(x,y,z)\cdot A^T+b$亦为刚体变换，其中$A^T$表示$A$的转置.

七、一个二次曲面的S的方程为：$z^2=x^2+y^2-2021$,

$a)$判断S为什么类型的二次曲面;

$b)$求所有平行于x轴且与S相交形成一对相交直线的平面方程.

思考题、我们将E^2上最高次项为n的二元多项式的零点集称为n次曲线，证明：刚体变换将n次曲线映成n次曲线.