中国科学技术大学2021年春
《复分析》期末考试试卷

2021年7月17日

姓名：________ 系别：________ 学号：________

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	总分
得分											

一 (5分) 写出亚纯函数$\dfrac{\sin z}{z^2}$在$z=0$附近的洛朗展开式.

二 (5分) 写出将单位圆盘共形等价映射到单位圆盘的所有分式线性变换.

三 (5分) 已知整函数$f(z)$满足对任意$z\in\mathbb{C}$, $|f(z)-2|>1$, 证明$f(z)$为常值函数.

四 (20分) 用留数定理计算如下积分:

$$(1)\quad \int_{|z|=\frac{3}{2}}\frac{dz}{\sin(\pi z)};\qquad\qquad (2)\quad \int_0^{\infty}\frac{\cos(t)}{t^2+2021^2}\,dt.$$

五（10分）计算方程$z^8-4z^5+z^2-1=0$在圆环$1<|z|<2$中的根的个数并说明理由.

六 (10分) 构造上半圆盘$\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1,\ \mathrm{Im}\,z>0\}$到上半平面的共形等价映射.

七 (10分) 设$f(z)$在单位圆盘D上全纯，在$\overline{D}$上连续，且在∂D上$|f(z)|\equiv 1$. 求证$f(z)$为一有理函数.

八 (10分) 设D为上半平面，$\mathcal{F}$ 是满足如下性质的函数族.

$$\mathcal{F}=\{f:D\to\mathbb{C}\mid f\text{全纯},\ |f(z)|<2021,\ f(i)=0\}.$$

求 $\sup\{|f(2i)|:f\in\mathcal{F}\}$.

九 (10分) 记$E_p(z)=(1-z)\exp(\sum_{k=1}^{p}\frac{z^k}{k})$, $p\geq 1$. 考虑如下问题:

1.（2分）证明: $\forall p\geq 1$, $E_p(z)$为整函数;
2.（3分）给出$E_p(z)$在复平面上的全部零点并说明理由;
3.（5分）证明: $\forall p\geq 1$, 若$|z|\leq 1$, 则$|1-E_p(z)|\leq |z|^{p+1}$.

十 (15分) 记$D=\{s\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,s>1\}$. 考虑函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

1.（2分）证明对任意$s\in D$, 上述级数收敛.
2.（5分）定义$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, $s\in D$. 证明$\zeta(s)$为D上的全纯函数.
3.（5分）我们知道，复平面上的亚纯函数$\cot(\pi z)$的部分分式展开为

$$\cot(\pi z)=\frac{1}{\pi z}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-n}+\frac{1}{z+n}\right).$$

试用此部分分式展开证明，亚纯函数$\cot(\pi z)$在$z=0$附近的洛朗展开式为

$$\cot(\pi z)=\frac{1}{\pi z}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\zeta(2k)\,z^{2k-1}.$$

4.（3分）用上述洛朗展开式计算$\zeta(2)$的值.