



代数数论 2021 春

考试时间：6月23日晚7:30 - 9:30。共10题，每题10分。

设 $f(T) = T^3 - T - 1$, α 是 $f(T)$ 的一个根, 记 $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $L = K$ 的正规闭包. 记 $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$.

1. 证明 $f(T)$ 在 $\mathbb{Q}[T]$ 上不可约;
2. 设 $p = 2, 5$, 问 $f(T)$ 在 $\mathbb{Q}_p[T]$ 上是否可约? 若可约, 写出其分解式, 系数精确到 $O(p^2)$.
3. 计算 K 的判别式与 r_1 和 r_2 . 证明 $1, \alpha, \alpha^2$ 是 K 的一组整基.
4. 写出 $2\mathcal{O}_K$ 和 $5\mathcal{O}_K$ 的素理想分解.
5. 计算 K 的类数.
6. 证明 K 中的单位根只有 ± 1 . 证明 α 是 \mathcal{O}_K 的一个单位.
7. 证明 $\text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ 同构于三次对称群 S_3 ; 证明 $F \subset L$.
9. 计算 F 的类数.
10. 证明 L/F 是在所有素位处均不分歧的 abel 扩张.