

中国科学技术大学数学科学学院
2020~2021 学年第2 学期期中考试试卷

A卷 B卷

课程名称 近世代数 课程编号 001010

考试时间 2021年5月22日 考试形式 闭卷

姓名 _____ 学号 _____ 学院 _____

1. (5分) 请准确写出近世代数任课老师的名字和至少一名助教的名字.
2. (10分) 设 G 是一个群, N 是 G 的正规子群, H 是 G 的子群. 证明: $H \cdot N$ 是 G 的子群.

3. (10分) 证明 $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$ (乘法群, 或记作 $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z})^*$)是循环群, 找出它的一个生成元; 并求 $0 < i < 13$ 使得 $\frac{100}{13^i} \equiv i \pmod{13}$.

4. (10分) 列举200阶的交换群(即阿贝尔群)的同构类; 并且举出一个200阶非交换群的例子.

5. (10分) 描述所有非同构的39阶非交换群.

6. (15分) 设 $\phi: G_1 \rightarrow G_2$ 是满同态, $N_1 \triangleleft G_1$, $N_2 = \phi(N_1)$. 证明

(1) $N_2 \triangleleft G_2$;

(2) ϕ 诱导满群同态 $\bar{\phi}: G_1/N_1 \rightarrow G_2/N_2$ (即复合映射 $G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_2/N_2$ 通过 $\bar{\phi}$ 分解).

7. (20分)

- (1) 写出置换群(对称群) S_7 中一个元素, 使得它的阶最大;
- (2) 求 S_7 中对换的个数, 和二阶元的个数 (给出一个有意义的表达式即可);
- (3) 给出 S_7 的两个互不同构的8阶子群;
- (4) 给出 S_7 的一个16阶的子群, 是否所有的16阶子群均彼此同构?

8. (20) 设 p 是一个素数, 已知 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 是一个域. 现在考虑 $G = GL_3(\mathbb{F}_p)$ 在列向量空间 \mathbb{F}_p^3 上的作用: $(A, v) \mapsto Av$.

- (1) 求群 $G = GL_3(\mathbb{F}_p)$ 的阶, 并写出它的一个 Sylow p -子群;
- (2) 求 \mathbb{F}_p^3 在 G 作用下的轨道个数;
- (3) 取非零向量 $\alpha \in \mathbb{F}_p^3$, 求它的稳定子群(不动子群)的阶数;
- (4) 取线性无关的两个向量 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p^3$, 求保持这两个向量不动的子群的阶数.