2021 近世代数(H)期中

授课教师：陈小伍 时间：2 小时 50 分钟

一、（40 分）考虑 Gauss 整环$R=\mathbb{Z}[i]$以及$K=\{a+bi|a,b\in\mathbb{Q}\}$。设域扩张$E/K$使得$E$为$x^4+x^3+x^2+x+1\in K[x]$的分裂域。

（1）证明：K同构于R的分式域。

（2）请列出R的所有子环，说明哪些子环是唯一分解环（给出具体论证）。

（3）在R中，计算最大公因子$\gcd(4+7\mathrm{i},4-3\mathrm{i})$。

（4）计算商环$R/(4+7i,4-3i)$的阶数。

（5）考虑商环$S=R/(4-3i)$。试给出S的所有理想，并指出哪些为素理想。

（6）判断并论证：多项式$x^4+x^3+x^2+x+1\in K[x]$是否可约。

（7）计算维数$\dim_{\mathbb{Q}} E=[E:\mathbb{Q}]$。

（8） 判断并论证：域自同构群$Aut(E)$是否为 Abel 群（交换群）。

二、（30 分）考虑八元域$\mathbb{F}_8=\mathbb{F}_2/(x^3+x+\bar{1})$。记$u=\bar{x}$。于是，$\mathbb{F}_8$中元素均形如$a+bu+cu^2,a,b,c\in\mathbb{F}_2$。自然视$\mathbb{F}_2$为$\mathbb{F}_8$的子域。

（1）给出$\mathbb{F}_8$的所有子环，并给出论证。

（2）$\mathbb{F}_8[x]$中共有多少个首一的二次不可约多项式？

（3）将多项式$x^3+x+\bar{1}$在$\mathbb{F}_8$中进行不可约分解，给出论证。

（4）将多项式$x^{16}+x$在$\mathbb{F}_8$中进行不可约分解，给出论证。

（5）计算$(u^2+\bar{1})^{-1}$。

（6）考虑商环$R=\mathbb{F}_2[y]/(y^3+y^2+\bar{1})$。请论证并具体构造环同构$R\simeq\mathbb{F}_8$。

三、（20 分）考虑一元有理函数域$K=\mathbb{Q}(t)$。$E=\mathbb{Q}(t)$为K中包含t^4的最小子域。

（1）证明：域E同构于K。

（2）计算域扩张K/E的维数$\dim_{\mathrm{E}} K=[K:E]$。

（3）计算域扩张K/E自同构群$Aut(K/E)$的阶数。

（4）判断并论证：$\mathbb{Q}(t^2)$上的任何自同构是否均可延拓为K上的自同构?

四、(10 分)设R为整环，记$R^{\times}=R\backslash\{0_R\}$。试证明以下等价：

（1）环R为主理想整环 PID。

（2）存在映射$\phi: R^{\times}\to\mathbb{N}$满足如下条件：对于任意$a,b\in R^{\times}$，要么$b|a$，要么存在适当的$\delta,\gamma\in R$使得$\phi(a\delta-b\gamma)<\phi(b)$。（注：两种情况可能同时发生）