2019 级统计学专业《实用随机过程》期中考试试题

所有试题解答写在答题纸上，答案写在试卷上无效

1. （14 分） 设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 1\}$ 是两个独立同分布的随机变量序列，满足 $\mathrm{E}\,X_1 = \mu_1$, $\mathrm{E}\,Y_1 = \mu_2$, 再设 $N \sim \text{Poission}(\lambda)$ 且独立于 $\{X_n, Y_n, n \geq 1\}$, 求 $\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^N X_i, \sum_{j=1}^N Y_j\right)$.

2. （总 16 分，每小题 8 分） 设 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立, $X_k \sim \mathrm{Exp}(\lambda_k)$, $k = 1, \ldots, n$.

   (1) 求 $\mathrm{P}\left(X_i = \min\limits_{1\leq j\leq n} X_j\right)$; (2) 求 $\mathrm{P}\left(X_i = \min\limits_{1\leq j\leq n} X_j \,\middle|\, \min\limits_{1\leq k\leq n} X_k > t\right)$, 其中 $t > 0$.

3. （16 分） 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是强度 $\lambda = 2$ 的齐次 Poisson 过程, 第 i 个事件发生时刻记为 S_i, $i \geq 1$. 求

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} Z_i \max\left\{10 - S_i, 0\right\}\right],$$

   其中 $\{Z_n, n \geq 1\}$ iid $\sim N(5, 10)$, 该序列独立于过程 $\{N(t), t \geq 0\}$..

4. （16 分, 第一小题 10 分, 第二小题 6 分） 假设系统故障的发生规律可以用齐次 Poisson 过程来描述, 单位时间平均发生 12 次故障, 每次故障都要造成损失, 分别以概率 1/2, 1/3 和 1/6 损失 \$1, \$5 和 \$10. 设 $X(t)$ 表示到时刻 t 系统因故障累计造成的损失大小.

   (1) 求 $\mathrm{P}(X(t) = 11)$; (2) 求 $\mathrm{Cov}(X(t), X(t+5))$.

5. （总 22 分，前三小题每题 5 分，最后一小题 7 分） 假设一个元件于时刻 0 开始投入使用，该元件易于受到外界的冲击, 在前 5 个小时内冲击以每小时4个的泊松速率到达, 在随后的时间段中冲击是每小时 2 个的泊松速率到达. 泊松速率到达是指不可能有两个或多个冲击同时到达.

   (1) 问冲击到达可以用什么样的过程来描述？

   (2) 求时间段 $(2, 4]$ 有 1 个冲击发生的概率.

   (3) 求时间段 $(4, 6]$ 有 1 个冲击发生的概率.

   (4) 求第三个冲击发生时刻 S_3 的概率密度函数.

6. （16 分）设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 是独立同分布的非负随机变量序列, 共同的分布具有概率密度函数 $f(x)$, $M \sim \text{Poisson}(\lambda_0)$, $\lambda_0 > 0$, 且独立于 $\{X_n, n \geq 1\}$, 定义

$$N(t) = \#\left\{k : X_k \leq t, k \leq M\right\}, \quad t \geq 0,$$

   证明 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是非齐次 Poisson 过程, 其强度函数为 $\lambda(t) = \lambda_0 f(t)$.