

中国科学技术大学

2020—2021学年第二学期期中考试试卷

考试科目 数理统计 得分 _____
 姓名 _____ 学号 _____

考试时间: 2021年5月19日9:45—11:45

- 一. (20分) 假设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自 Poisson 总体 $P(\lambda)$ 的一组简单样本, 试
- (1) 将抽样分布表示为指数族的自然形式, 并给出自然参数空间;
 - (2) 证明统计量 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 为充分完备统计量.
 - (3) 证明 $g(\lambda) = e^{-\lambda}$ 不存在可以达到 C-R 不等式下界的无偏估计.
- 二. (30分) 设 X_1, \dots, X_n 为来自 0-1 分布 $B(1, p)$, $0 < p < 1$ 的一组简单样本, 试
- (1) 求 $g(p) = (1-p)^2$ 的矩估计量和极大似然估计量, 并说明是否为无偏估计.
 - (2) 求 $g(p)$ 的 UMVUE, 其方差是否达到 C-R 不等式的下界?
 - (3) 证明 $g(p)$ 的极大似然估计量具有渐近正态性.
- 三. (15分) 设 X_1, \dots, X_n 来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的一组简单随机样本, 试 ($0 < \alpha < 1$)
- (1) 证明样本平均值 \bar{X} 与统计量 $X_1 - \bar{X}$ 相互独立.
 - (2) 求概率 $P(X_1 \leq 0)$ 的 UMVUE 以及其置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.
- 四. (15分) 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自如下分布的一组简单样本

X	0	1	2
P	$\frac{1}{2}[(1-\theta)^2 + \theta^2]$	$2\theta(1-\theta)$	$\frac{1}{2}[(1-\theta)^2 + \theta^2]$

其中 $0 < \theta < 1/2$ 为参数. 试利用 重参数化方法 和 极大似然估计的不变性

- (1) 求 θ 的极大似然估计量, 并求其渐近分布.
 - (2) 由此给出 θ 的一个 (渐近) 置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间 ($0 < \alpha < 1$).
- 五. (20分) 设 $X_1, \dots, X_n, i.i.d \sim U(0, \theta)$, 其中 $\theta > 1$ 为未知参数. 记 $X_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$, 试
- (1) 证明 $X_{(n)}$ 是充分但不完备的统计量.
 - (2) 求 θ 的 UMVUE.