USTC概率论期中试题　2021年5月13日

姓名：　　　　　　　学号：　　　　　　　分数：

1. **(15分)** 设X为随机变量，令$G(x)=\mathbb{P}(X<x)$，证明$G(x)$左连续.

2. **(15分)** 对$N\geq 1$，记$\mathbb{P}_N$为$\Omega_N=\{1,2,\ldots,N\}$上均匀概率测度，通过模$q$的余数可定义随机变量

$$\pi_q:\Omega_N\to Z_q=\{0,1,\ldots,q-1\}.$$

对两个不同素数q_1和q_2，证明π_{q_1}和π_{q_2}渐近独立，即$\forall a_i\in Z_{q_i}$有

$$\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}_N(\pi_{q_1}=a_1,\pi_{q_2}=a_2)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}_N(\pi_{q_1}=a_1)\times\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}_N(\pi_{q_2}=a_2).$$

3. **(15分)** 设(X,Y)为取值整数值的随机向量，联合分布列为$f(x,y)$，证明

$$\begin{aligned}f(x,y)=\mathbb{P}(X\geq x,Y\leq y)-\mathbb{P}(X\geq x+1,Y\leq y)\\-\mathbb{P}(X\geq x,Y\leq y-1)+\mathbb{P}(X\geq x+1,Y\leq y-1),\end{aligned}$$

并求出掷一均匀骰子r次中最小值$X_{\min}$与最大值$X_{\min}$的联合分布列.

4. **(15分)** ζ小盆友有N块积木，N服从参数为λ的泊松分布，δ小盆友独立地以1/2概率拿走每一块. 若δ小盆友的积木块数为K，求$\mathbf{E}[K]$和$\mathbf{E}[N|K]$.

5. **(20分)** 给定$b>a>0$，离散随机变量X取值于区间$[a,b]$，试回答

(i)证明$\mathrm{Var}(X)\leq\frac{1}{4}(b-a)^2$;

(ii)当X变化时，找出并验证乘积$\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[1/X]$的取值范围.

6. **(20分)** 直线上简单随机游动$S_n=\sum_{k=1}^n X_k$，S_0=0，这里$P(X_1=1)=p$，$P(X_1=-1)=1-p$，$0<p<1$. 记$S_0,S_1,\ldots,S_n$中互不相同的值个数为R_n. 试证明

(i) $\mathbb{P}(R_n=R_{n-1}+1)=\mathbb{P}(S_1\cdots S_n\neq 0)$;

(ii) 当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\mathbf{E}[R_n]\to\mathbb{P}(S_k\neq 0,\ \forall k\geq 1)$;

(iii) $\mathbb{P}(S_k\neq 0,\ \forall k\geq 1)=|2p-1|$.