中国科学技术大学

数学逻辑

2021

自主测试 2021

群青启林　　　　2021 年 6 月 12 日

2021.1. 已知 $a \in \mathbb{R}$，且 $x^4-(4a-50)x^2+a^2=0$ 的 4 个解成等差数列，则 a 为______。

解. $a=75$ 或 $\frac{75}{11}$。

易转化为 $t^2-(4a-50)t+a^2=0$ 的两个解 t_1、t_2 满足 $t_2=9t_1$，这等价于 $\frac{t_2}{t_1}+\frac{t_1}{t_2}=9+\frac{1}{9}$，利用韦达定理转化如下：$\frac{(4a-50)^2}{a^2}-2=9+\frac{1}{9}$ 解得 $a=75$ 或 $\frac{75}{11}$。注意不需要检验原方程判别式。

2021.2. 已知长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 1，则四面体 ACB_1D_1 与四面体 BDA_1C_1 的公共部分体积为______。

解. $\frac{1}{6}$。

公共部分即长方体的常规嵌入八面体。

2021.3. 已知直线 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 与曲线 $y=\frac{4}{\sqrt{x}}$ 相切，则 $a+b$ 的最小值为______。

解. 9。

设切点 $(t,\frac{4}{\sqrt{t}})$，则切线 $y=\frac{-2}{\sqrt{t^3}}(x-t)+\frac{4}{\sqrt{t}}$，所求表达式为横纵截距之和 $3t+\frac{6}{\sqrt{t}}\geq 9$。

2021.4. 已知 $x^2+y^2=x^2+z^2+\sqrt{3}xz=z^2+y^2+yz=16$，则 $2xy+xz+\sqrt{3}yz$ 为______。

解. $4\sqrt{3}$。

显然考虑数形结合，平面上以 x,y,z 为有向长度，构造 OA、OB、OC 使得 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$、$\angle AOC=\frac{5\pi}{6}$、$\angle BOC=\frac{2\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 为边长 4 的等边三角形，所求即 $S_{AOB}+S_{AOC}+S_{BOC}=S_{ABC}=4\sqrt{3}$。

2021.5. 已知一个小球在 $0,1,2,\cdots,n$ 这 $n+1$ 个位置上游走，小球初始位置在 0 处，每步等可能地向前或者向后移动一个单位，但是在 0 处只能向前移动，在 n 处只能向后移动，则小球首次到达 n 所用的平均步数为______。

解. n^2。

这是一个带两侧壁的简单随机游走问题，求从 0 到 n 的首达时的期望。我们作反射处理，转化为 $-n$ 到 n 上的带两侧吸收壁的简单随机游走问题，求 0 处的吸收时间的期望。递推处理，设 k 处的吸收时间的期望为 E_k，则由一步转移法得
$E_k=\frac{1}{2}(E_{k-1}+1)+\frac{1}{2}(E_{k+1}+1),-n<k<n$，$E_{-n}=E_n=0$。由特征根理论易得 $E_k=-k^2+Ak+B$，待定系数知 $E_k=-k^2+n^2$，所求即 $E_0=n^2$。

2021.6. 已知 $\triangle\ ABC$ 的内角为 A,B,C，证明：
$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\cos B+\sqrt{3}\cos C\le 2$。

证明. 利用三角形母不等式
$x^2+y^2+z^2\ge 2xy\cos A+2yz\cos B+2zx\cos C$，取
$x=\frac{\sqrt{3}}{2},y=\frac{1}{2},z=1$ 即证！ □

2021.7. 已知函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足 $f(x+y)=f(x)\cos y+f(y)f(\frac{\pi}{2}-x)$，求所有可能的 f。

解. $f(x)=0$ 或 $f(x)=\sin x$。

赋值法：取 $y=0$，得 $0=f(0)f(\frac{\pi}{2})$。在原式中再令 $x=0$，得
$f(y)=f(y)f(\frac{\pi}{2})$。

若 $f(\frac{\pi}{2})=0$，则 $f(y)=0$，即 $f(x)=0$，f 恒为 0。

若 $f(x)$ 不恒为 0，则 $f(\frac{\pi}{2})=1$ 且 $f(0)=0$，

在原式中再令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $f(y+\frac{\pi}{2})=\cos y$，即 $f(x)=\cos\frac{\pi}{2}-x=\sin x$

综上并检验得 $f(x)=0$ 或 $f(x)=\sin x$。

2021.8. 已知 $g_0(x)=1,g_1(x)=x$，$g_n(x)=\frac{g_{n-1}^2(x)-2^{n-1}}{g_{n-2}(x)}$ $n\ge 2$，证明：$g_n(x)$ 是 n 次整系数多项式，并求 $g_n(x)$ 的全部零点。

证明. 计算并变换指标，递推式转化为
$g_{n+2}(x)g_n(x)-g_{n+1}^2(x)=2^n(g_2(x)g_0(x)-g_1^2(x))$，

利用二阶递推定理有 $q=2,p=-x$，得
$g_{n+2}(x)-xg_{n+1}(x)+2g_n(x)=0$，即 $g_{n+2}(x)=xg_{n+1}(x)-2g_n(x)$，
归纳易得 $g_n(x)$ 是首项系数为 1 的 n 次整系数多项式。

作为切比雪夫多项式类型的问题，下面可以利用特征根理论求 $g_n(x)$ 的表达式，再利用复数换元求 $g_n(x)$ 的全部零点；也可将上述过程简化改写为用三角换元求解。

用三角换元：改写递推式有：$\frac{g_{n+2}(x)}{\sqrt{2}^{n+2}}+\frac{g_n(x)}{\sqrt{2}^n}=2\frac{x}{2\sqrt{2}}\frac{g_{n+1}(x)}{\sqrt{2}^{n+1}}$
考虑到 $\sin{(n+1)\theta}+\sin{(n-1)\theta}=2\cos\theta\sin n\theta$，令 $x=2\sqrt{2}\cos\theta$，
又 $\frac{g_0(x)}{\sqrt{2}^0}=1=\frac{\sin\theta}{\sin\theta}$，$\frac{g_1(x)}{\sqrt{2}^1}=2\cos\theta=\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta}$
令 $h_{n+1}(x)=\frac{g_n(x)}{\sqrt{2}^n}\sin\theta$，有 $h_{n+1}(x)+h_{n-1}(x)=2\cos\theta h_n(x)$，
$h_1(x)=\sin\theta, h_2(x)=\sin 2\theta$

归纳易证 $h_n(x)=\sin n\theta,\ g_n(x)=\sqrt{2}^n\frac{\sin{(n+1)\theta}}{\sin\theta}$

上述为形式推导，当 $\sin\theta=0$ 时，直接计算或者利用极限与连续性有
$g_n(x)=(n+1)\sqrt{2}^n$，

现在 $g_n(x)=0$ 等价于 $\sin{(n+1)\theta}=0$ 且 $\sin\theta\neq 0$，所以
$\theta=\frac{k\pi}{n+1},k\in\mathbb{Z}$，从而 $x=2\sqrt{2}\cos\frac{k\pi}{n+1},k=1,2,\cdots,n$ 为 $g_n(x)$ 的全部零点。 □

2021.9. 对实数 x 定义 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，$\{x\}=x-[x]$，已知 $a\in\mathbb{R}$，证明：

a 为无理数当且仅当 $\forall m\in\mathbb{N}^*,\exists n\in\mathbb{Z},s.t.\ 0<\{na\}<\frac{1}{m}$。

证明. 本题考查与 Dirichlet 逼近定理有关的结论。

必要性：反证法：若 a 不为无理数，则设 $a=\frac{q}{p}$，
$p.q\in\mathbb{Z},q\neq 0,p>0,gcd(p,q)=1$，于是取 $m=p+1$，设
$nq=kp+r$，$k,r\in\mathbb{Z},0\leq r<p$，有 $\{na\}=\frac{r}{p}\notin(0,\frac{1}{m})$。

充分性：给定 $a\in\mathbb{R}$，由 Dirichlet 逼近定理，知

$\forall m\in\mathbb{N}^*,\exists n,l\in\mathbb{Z},0<n\leq m,s.t.\ |na-l|<\frac{1}{m}$

显然 $\{na\}=|na-l|$，而 a 为无理数，所以 $na-l\neq 0$，从而
$0<\{na\}<\frac{1}{m}$。

Dirichlet 逼近定理可由抽屉原理证明，此处从略。 □