微分方程II第二次阶段测验

考试时间：2021年6月5日19:00－21:30

除特别说明外，试卷中的U均为$\mathbb{R}^n$中的有界区域，$\partial U \in C^\infty$.

1.(15分)

(1)若$\partial U \in C^1$，则边值问题

$$\begin{cases} \Delta u - u = 1 & in \;\; U \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

的解$u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$在$U$内是否可能是严格正的？

(2)设$f \in L^2(U)$.利用变分法证明方程

$$\begin{cases} -\Delta u = f & in \;\; U \\ u = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

存在唯一弱解$u \in H_0^1(U)$.

2.(20分)设$U = (0,2) \times (0,2)$.

(1)求

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda u = 0 & in \;\; U \\ u = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

的第一、第二特征值及对应的特征函数.

(2)对于哪些a，方程

$$\begin{cases} \Delta u + 2\pi^2 u = x^2y^2 - axy & in \;\; U \\ u = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

至少有一解？

(3)证明：方程

$$\begin{cases} \Delta u + \dfrac{\pi^2}{4} u = x & in \;\; U \\ u = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

存在唯一弱解$u \in H_0^1(U)$，且满足$\|u\|^2_{L^2(U)} \leq \dfrac{256}{3\pi^4}$.

3.(15分)设$U = \{x = (x_1, x_2) \mid 1 < |x| < 3\}$，计算$\displaystyle\inf_{u-(|x|-1) \in H_0^1(U)} \int_U (|\nabla u|^2 - 2u)dx$.

4.(15分)设$u \in H^1(U)$为方程

$$Lu = -\Delta u + c(x)u = f \;\; in \;\; U$$

的弱解，$c \in L^\infty(U)$，$f \in L^2(U)$.证明：对于任意有界区域$V \subset\subset U$，

(1)$\|Du\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$,

(2)$\|D^2u\|_{L^2(V)} \leq C(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)})$, 其中$C$仅依赖于$n, V, U$及$L$的系数.

5.(15分)设$f, g \in C^0(\overline{U})$.

(1)若$u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$满足方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & in \;\; U \\ u = g & on \;\; \partial U \end{cases},$$

证明：$\|u\|_{L^\infty(\overline{U})} \le C(\|f\|_{L^\infty(\overline{U})} + \|g\|_{L^\infty(\partial U)})$，其中$C$仅依赖于$diam(U)$.

(2)若$u \in C^2(U) \cap C^0(\overline{U})$满足方程

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} = f & in \;\; U \\ u = g & on \;\; \partial U \end{cases},$$

其中$a^{ij} = a^{ji}, a^{ij} \in C^0(\overline{U})(i,j = 1 \dots n)$，存在常数$0 < \lambda \le \Lambda < +\infty$使得对于几乎处处的$x \in U$，$\xi \in \mathbb{R}^n$，$\lambda |\xi|^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \Lambda |\xi|^2$，证明：$\|u\|_{L^\infty(\overline{U})} \le C(\|f\|_{L^\infty(\overline{U})} + \|g\|_{L^\infty(\partial U)})$，其中$C$仅依赖于$diam(U), \lambda, \Lambda$.

6.(20分)

(1)算子L定义为$Lu := -\Delta u + c(x)u, u \in H^1(U)$ ，其中$c \in L^\infty(U)$为非负函数，若

$$\begin{cases} Lu_1 \le Lu_2 & in \;\; \mathcal{D}'(U) \\ u_1 \le u_2 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

证明：$u_1 \le u_2 \;\; in \;\; U$.

(2)考虑方程

$$\begin{cases} -\Delta u + \sin u = 1 & in \;\; U \\ u = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}$$

①给出方程的上解$\overline{u} \in H^1(U)$，下解$\underline{u} \in H^1(U)$.

②证明：以上方程存在弱解$u \in H_0^1(U)$.

7.(20分)对于$\sigma > 0$，考虑$u_\sigma \in H^1(U)$为如下问题的解：

$$\sigma \int_U \nabla u_\sigma \cdot \nabla v dx + \int_U u_\sigma v dx = \int_U f v dx, \; \forall v \in H^1(U)$$

证明：

(1)若$f \in L^2(U)$，则以上问题存在唯一解.

(2)以上问题对应的Euler-Lagrange方程为

$$\begin{cases} -\sigma \Delta u + u = f & in \;\; U \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & on \;\; \partial U \end{cases}.$$

(3)当$\sigma \to +\infty$时，$u_\sigma \to \dfrac{1}{|\,U\,|} \displaystyle\int_U f(x) dx \;\; in \;\; H^1(U)$.