《数学分析 A2》第三次单元测

姓名　　　　学号　　　　成绩

2021 年 7 月 7 日

1. 计算下列各题 (每题 10 分, 共 50 分)：

   (a) 设 Γ 为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 在第二象限中的部分，计算 $\displaystyle\int_{\Gamma} xy\,ds$.

   (b) Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 交成的圆周，从第一卦限看 Γ, 逆时针方向为正向。计算 $\displaystyle\int_{\Gamma} dx+y\,dy$.

   (c) Σ 为第一卦限中的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 计算 $\displaystyle\int_{\Sigma} x^2 d\sigma$.

   (d) Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧，计算积分

   $$\iint_{\Sigma} dydz+y\,dzdx+y^2dxdy.$$

   (e) 计算 $\displaystyle\int_{\Gamma} y\,dx+z\,dy+x\,dz$, 其中 Γ 是平面 $x+y=2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ 交成的圆周，从原点看去，顺时针方向是 Γ 的正向。

2. 设 $\mathbf{v}=(P,Q,R)$ 为向量场，各分量具有二阶连续偏导数，证明：

   $$\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})-\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\Delta\mathbf{v},$$

   其中 $\Delta\mathbf{v}=(\Delta P,\Delta Q,\Delta R)$. (10 分)

3. 证明向量场 $\mathbf{v} = ((2x+y+z)yz, (x+2y+z)zx, (x+y+2z)xy)$ 是有势场，并求出它所有的势函数。(10 分)

4. 设在 $\mathbb{R}^3$ 空间中光滑曲面 Σ 围成闭区域 Ω, 外法向 $\mathbf{n}$ 指向 S 的正侧。函数 u, v 在 Ω 上具有二阶的连续偏导数。证明 (a-d 每题 5 分，e 题 10 分，共 30 分)

   (a) $\displaystyle\iiint_{\Omega} v\Delta u\, dxdydz = -\iiint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dxdydz + \int_{\Sigma} v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma.$

   (b) $\displaystyle\iiint_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) dxdydz = \int_{\Sigma} \left(v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) d\sigma.$

   (c) u 在 Ω 中满足 $\Delta u = 0$（此时称 u 为 Ω 上的调和函数）当且仅当对于 Ω 中任意简单闭曲面 S 有 $\displaystyle\int_{S} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0.$

   (d) 若 u 为 Ω 上的调和函数，则 u 在 Ω 内部的值由它在 Σ 上的值唯一确定。

   (e) 若 u 为 Ω 上的调和函数，$(x_0, y_0, z_0) \in \Omega^{\circ}$, $B_r(x_0, y_0, z_0)$ 表示以 (x_0, y_0, z_0) 为球心，$r > 0$ 为半径的球，其包含在 Ω 中，则有

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{\partial B_r(x_0, y_0, z_0)} u(x, y, z) d\sigma.$$