数学分析A2 第一次单元测试

学生所在系：　　　　　姓名：　　　　　学号：　　　　总分：

2021 年 5 月 10 日

一、计算(给出必要的计算步骤)(每小题10分)

得分	

(1) 对方程$e^z - xyz = 0$, 求$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

(2) 设$\mathbf{f}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$, 求$\mathbf{Jf}$和$\mathbf{J}(\mathbf{f}^{-1})$.

二、(15分)

得分	

将函数$z = \dfrac{1}{1 - xy}$在$(0, 0)$处作Taylor展开, 并求出$\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m}(0, 0)$, 其中$n$和$m$是任意非负整数.

三、(15分)

得分	

设$f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$, 其中$\varphi(x, y)$在点$(0, 0)$的某个邻域内连续, 问:

(1) 当且仅当$\varphi(x, y)$满足什么条件时？偏导数$f'_x(0, 0)$和$f'_y(0, 0)$存在(需说明理由).

(2) 当且仅当$\varphi(x, y)$满足什么条件时？$f(x, y)$在$(0, 0)$处可微(需说明理由).

四、(10分)

得分	

设$F(x, y, z)$和$G(x, y, z)$有连续偏导数, $\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \neq 0$, 曲线$\Gamma$:$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$过点$(x_0, y_0, z_0)$, 记$\Gamma$在$oxy$平面上的投影曲线为$L$, 求$L$上过点$(x_0, y_0)$的切线方程.

五、(10分)

得分	

设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数, 且满足$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,
证明函数$v=f(x^2-y^2,2xy)$也满足$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

六、(10分)

得分	

设平面点集$D\subset\mathbf{R}^2$, 且D上每个连续函数都有界, 证明D是紧致集.

七、(10分)

得分	

设二元函数$F(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上具有二阶连续偏导数, $F(x,y)=0$的解集形成一条不自交的封闭曲线L, 记L所围成的区域为D. 证明:

(1) $F(x,y)$必在区域D的内部取到最大值或最小值.

(2) 若对D内任意点(x,y), $F''_{xx}+F''_{yy}>0$, 则$F(x,y)$在D内恒小于0.

八、(10分)

得分	

设二元函数$z=f(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上具有一阶连续偏导数, 且满足
$xf'_x(x,y)+yf'_y(x,y)=0$, 证明$f(x,y)$是常数.