中国科学技术大学

2020－2021学年第二学期期终考试试卷

考试科目：数学分析A2　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

注意事项:

1.答卷前, 考生务必将所在系、姓名、学号等填写清楚.

2.本考试为闭卷考试, 共八道大题, 满分100分, 考试时间120分钟.

3.解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, **写在草稿纸上无效**.

2021 年 7 月 16 日

一、(10分)

得分	

计算二重积分$\iint\limits_D \frac{2x}{y^2+xy^3}dxdy$, 其中$D$为平面曲线$xy=1$, $xy=3$, $y^2=x$, $y^2=3x$所围成的有界闭区域.

二、(10分)

得分	

设函数$u=u(x,y,z)$是由方程$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$所确定的隐函数,

其中a,b,c 是实常数.证明: $|\mathrm{grad}\ u|^2=2\mathbf{r}\cdot\mathrm{grad}\ u$,

其中$\mathrm{grad}\ u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$, $\mathbf{r}=(x,y,z)$.

三、(20分)

得分	

设L是起点为原点, 终点为$(a,b,c)(a>0,b>0,c>0)$的有向直线段, 且(a,b,c)是椭球面$x^2+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}=1$上的点, 问$a,b,c$ 取何值时, 第二型曲线积分

$\int_L yzdx+zxdy+xydz$的值最大, 并求出此最大值.

四、(20分)

得分	

设点P是椭球面$S: x^2+y^2+z^2-yz=1$上的动点, S在点P处的切平面与坐标平面oxy垂直, 求点P的轨迹L, 并计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+3)\sqrt{|y-2z|}}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}d\sigma$, 其中$\Sigma$是椭球面$S$位于曲线$L$上方的部分.

更正：分子应当没有根号

五、(10分) 得分

计算第二型曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} 4xzdydz - 2yzdzdx + (x^2 - z^2)dxdy$, 其中$\Sigma$是曲线$z = e^y$, $0 \le y \le 1$, 绕z轴旋转生成的旋转曲面, 取下侧.

六、(10分)

得分	

计算由三个圆柱体$x^2+y^2\leq a^2$, $x^2+z^2\leq a^2$和$y^2+z^2\leq a^2 (a>0)$交成的几何体的体积.

七、(10分)

得分	

设在上半平面$D=\{(x,y):y>0\}$内, 函数$f(x,y)$具有连续的一阶偏导数, 且对任意的$t>0$都有$f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明: 对D内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L, 都有$\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

八、(10分)

得分	

设$f(x)$和$g(x)$在$\mathbf{R}$上, $K(x,y)$在$\mathbf{R}^2$上都是连续的正值函数, 且满足

$\int_0^1 f(y)K(x,y)dy = g(x)$, $\int_0^1 g(y)K(x,y)dy = f(x)$.

(1) 证明: 若$m = \min\limits_{0\le x\le 1} \frac{f(x)}{g(x)}$, $M = \max\limits_{0\le x\le 1} \frac{f(x)}{g(x)}$, 则$mM = 1$.

(2) 证明: 当$0 \le x \le 1$时, $f(x) = g(x)$.