1. 计算

$$\lim_{x\to 0}\left((1+x^2)\sin\frac{1}{x}\right)$$

2. 假设

$$f(x)=\begin{cases}x^2,\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\\ 0,\mathbb{Q}\end{cases}$$

问 f 在哪些点可导？(说明理由)

3. 假设

$$a_n=|b_1-b_2|+|b_2-b_3|+\cdots+|b_{n-1}-b_n|,\forall n\in\mathbb{N}$$

如果数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，证明：数列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛。

4. 设函数 f 在 $[a,b]$ 上单调递增，而且

$$a<f(a)<f(b)<b$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$。

5. 证明函数 $\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续。

6. 假设

$$f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^2e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$$

如果 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导，求 a,b 的值。

7. 假设函数 $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty)$ 满足

$$\lim_{x\to 0}(f(x)+\frac{1}{f(x)})=2$$

证明：$\lim_{x\to 0}f(x)$ 存在。

8. 假设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0,f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$。

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上二阶可导，$f(0)=1,f'(0)\le 1,f''(x)<f(x)$。证明：当 $x>0$ 时，$f(x)<e^x$

10. 假设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上的严格凸的二阶可导函数，证明：$\forall\xi\in\mathbb{R},\exists x_1,x_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$$