

中国科学技术大学
2021—2022学年第一学期期末考试试卷

考试科目：数学分析A1

得分：

学生所在系：

姓名：

学号：

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将姓名、学号等填写清楚。
2. 本考试为闭卷考试，共八道大题，总分100分，考试时间120分钟。
3. 解答请写在试题后的空白处，若写不下，可写在试题的背面，写在草稿纸上。

2022年1月13日

一(15分)、

计算 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)} dx$.

得分



二(15分)、

得分	
----	--

求由方程 $|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所表示的平面曲线所围成的平面图形的面积.



得分	
----	--

三(15分)、

设 $f, g \in C^\infty(-1, 1)$, 而且满足

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leq n!|x|, \quad \forall x \in (-1, 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

证明: $f \equiv g$.



得分

四(15分)、

设 $a, b \geq 1$. 证明:

$$ab \leq e^{a-1} + b \ln b.$$

并讨论不等式中等号成立的条件.



五(10分)、

举例说明存在 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 满足下列条件:

(i) $f \in R[0, 1]$;

(ii) $f \notin C[0, 1]$;

(iii) f 在 $[0, 1]$ 区间存在原函数.



六(10分)、

假设

$$\Gamma := \left\{ f \in C[0, 1] : f(0) = 0, \int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 1 \right\}.$$

计算

$$\sup_{f(x) \in \Gamma} \int_0^1 f^2(x) dx.$$

得分	
----	--



七(10分)、

假设 $f \in C^2[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, 证明:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f''(t)| dt.$$



得分	
----	--

八(10分)、

假设 $f \in C[0, 1]$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ 存在且有限, 证明: 对任意 $g \in C^1[0, 1]$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 g(x) f(x^n) dx = g(1) \int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx .$$

