2021 秋线性代数(B2)期中

授课教师：陈发来 欧阳毅 时间：2 小时

一(10') 求三次有理系数多项式$f(x)$使得$f(x)+1$被$(x-1)^2$整除，且$f(x)-1$被$(x+1)^2$整除。

二(10') 设复系数多项式$f(x)=x^2+ax+1, g(x)=x^3+x^2+b$，其中$a,b$是常数。给出$f(x)$与$g(x)$有公因子（不互素）的充要条件（用$a,b$表示）。

三(10')设A为n阶方阵，且$rank(A)=n-1$.证明：$rank(A^k)\geq n-k$（k为正整数）。

四(20')给定矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

1. 求出所有满足条件$AB=BA$的实矩阵B.
2. 用W记由 1 求得的所有矩阵全体。证明：W是$\mathbb{R}^{4\times4}$的子空间，并求其维数与一组基。
3. 求$\mathbb{R}^{4\times4}$的子空间W'使得$\mathbb{R}^{4\times4}=W\oplus W'$。

五(15')设矩阵$A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$，其中$a_{ij}=\delta_{ij}+i+j$，$\delta_{ij}$为 Kronecker 记号。求矩阵$A$的行列式。

六(15')试求多项式矩阵A的 Smith 标准型、不变因子和初等因子组，这里

$$A=\begin{bmatrix} x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}$$

七(20')设$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，称矩阵$X\in\mathbb{F}^{n\times m}$为矩阵$A$的广义逆，如果$AXA=A, XAX=X$.

1. 若$A=P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}Q$，其中$P,Q$分别为$m,n$阶可逆方阵，试求$A$的广义逆。
2. 证明：对矩阵$A\in\mathbb{F}^{m\times n}$，其每一个广义逆都可以表示为$X=\tilde{Q}^{-1}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\tilde{P}^{-1}$，这里$\tilde{P},\tilde{Q}$是满足$A=\tilde{P}\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}\tilde{Q}$的可逆方阵。