2021 秋线性代数(B2)期末

授课教师：陈发来 欧阳毅 时间：2 小时

一(30',每空 5')填空

1.设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.则$A$的 Jordan 标准形是______________，A的最小多项式是______________，A的奇异值是____________.$\mathbb{R}^3$上的线性变换$\mathcal{A}: x\to Ax$的二维不变子空间为________________________.

2.在四维欧式空间$\mathbb{R}^4$中，W是由$\alpha_1=(1,0,1,0)$与$\alpha_2=(0,1,0,1)$生成的子空间。向量$\alpha=(1,1,-1,-1)$在W中的正交投影向量β(即满足$\alpha-\beta\in W^{\perp}$且在$W$中的向量$\beta$)是__________.

3.复方阵$A=\begin{pmatrix}0&i&1\\-i&0&i\\1&-i&0\end{pmatrix}$的酉相似标准形为____________________.

二(15')给定数域$\mathbb{F}$上的n阶方阵A，定义$V=\mathbb{F}^{n\times n}$上的线性变换$\mathcal{A}: X\to AX-XA$.如果A可以对角化，$\mathcal{A}$是否也可以对角化？请说明理由。

三(15')设A为n阶复方阵，k为正整数。用 Jordan 标准形证明:

$$rankA^k-rankA^{k+1}\geq rankA^{k+1}-rankA^{k+2}$$

四(15')设矩阵$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

1.求矩阵A的正交相似标准形.

2.设$\mathbb{R}^3$上的线性变换$\mathcal{A}: x\to Ax\in\mathbb{R}^3$.证明：$\mathcal{A}$是绕过原点的直线$l$的旋转变换，

并求变换的轴l及旋转角度θ.

五(15')设$\mathcal{A}$是有限维欧式空间V上的线性变换。证明:

$$V = Im\mathcal{A} \oplus Ker\backslash scriptA$$

六(10')设A, B为同阶实对称方阵，且$A \geq B \geq 0$（即$A \geq 0, B \geq 0$且$B - A \geq 0$）.

证明：$\sqrt{A} \geq \sqrt{B}$.

注：此卷有多道题与 2021 春线性代数（A2）陈发来老师班期末重合，故也可以作为 A2 的参考。