线性代数 A1 期中考试

2021 年 5 月 15 日 14:00—16:00，5103、5104

姓名______________ 学号__________________ 总分______________

一、填空题 (每空 4 分，共 32 分). 结果须化简.

实方阵 $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\operatorname{tr}(A^TA) = \underline{\enspace ① \enspace}$，伴随方阵 $A^* = \underline{\enspace ② \enspace}$，$\operatorname{rank}(A) = \underline{\enspace ③ \enspace}$.

实方阵 $B = \begin{pmatrix} O & -I_3 & O \\ O & O & -I_3 \\ -I_3 & O & O \end{pmatrix}$，则 $\det(B) = \underline{\enspace ④ \enspace}$，$B^{-1} = \underline{\enspace ⑤ \enspace}$，$\sum\limits_{k=0}^{2021} B^k = \underline{\enspace ⑥ \enspace}$.

多项式方阵 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \\ 1 & x^3 & x^6 \end{pmatrix}$ 的 2 阶行列式因子 $D_2 = \underline{\enspace ⑦ \enspace}$，第 3 个不变因子 $d_3 = \underline{\enspace ⑧ \enspace}$.

二、简答题 (每小题 6 分，共 30 分). 判断叙述是否正确，并简要说明理由.

1. 若 3 阶实方阵 A 满足 $A^2 = O$，则 $A = O$.
2. 存在 3 阶实方阵 A 满足 $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. 对于任意 3 阶实方阵 A, B，$\det(A^2 - B^2) = \det(A+B)\det(A-B)$.
4. 对于任意 3 阶实方阵 A, B，矩阵方程 $AX = B$ 有解当且仅当 $XA = B$ 有解.
5. 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{F}^{n\times k}$ 都是行满秩的，则 AB 一定是行满秩的.

三、解答题 (共 38 分). 需给出详细解答或证明过程.

1. (14 分) 设 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$，其中 $a_{ij} = \begin{cases} i, & i = j; \\ 1, & i \neq j. \end{cases}$ 求 $\det(A)$ 和 A^{-1}.
2. (12 分) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = I$. 证明：存在可逆实方阵 P 使得
$$A = P \begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix} P^{-1}, \quad r = \operatorname{rank}(A+I).$$
3. (12 分) 设 $m \times n$ 实矩阵 A, B 满足线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 同解. 证明：存在可逆实方阵 P 使得 $B = PA$.

参考答案和评分标准

一、 每空 4 分

① 22 ② $\begin{pmatrix}1&-2&1\\1&-2&1\\1&-2&1\end{pmatrix}$ ③ 2 ④ -1 ⑤ B^T ⑥ O ⑦ $x(x-1)$ ⑧ $x^3(x-1)^2(x+1)$

二、 每小题判断 2 分，理由 4 分.

1．错误．例：$A=E_{12}$.

2．正确．例：$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

3．错误．例：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

4．错误．例：$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

5．正确．A,B 行满秩 $\Rightarrow AX=I_m, BY=I_n$ 有解 $\Rightarrow ABYX=I_m \Rightarrow AB$ 行满秩.

三、

1. 设 $P=\begin{pmatrix}1&\\-\mathbf{1}&I_{n-1}\end{pmatrix}$，则 $PAP^T=\operatorname{diag}(1,1,2,\cdots,n-1)$. (5 分)

   $\det(A)=(n-1)!$，$A^{-1}=P^T\operatorname{diag}(1,1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n-1})P=(b_{ij})$， (6 分)

   其中 $b_{11}=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}$，$b_{i1}=b_{1i}=-\dfrac{1}{i-1}$，$b_{ij}=\dfrac{\delta_{ij}}{i-1}$，$i,j\geqslant 2$. (3 分)

2. 设 $A+I=P\begin{pmatrix}I_r&O\\O&O\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix}B_1&B_2\\O&O\end{pmatrix}P^{-1}$，其中 P,Q 是可逆实方阵. (4 分)

   由 $(A-I)(A+I)=O$，得 $(B_1-2I)\begin{pmatrix}B_1&B_2\end{pmatrix}=O$，得 $B_1=2I$. (4 分)

   故 $A=P\begin{pmatrix}I&B_2\\O&-I\end{pmatrix}P^{-1}=\underbrace{P\begin{pmatrix}I&-\frac{1}{2}B_2\\O&I\end{pmatrix}}_{M}\begin{pmatrix}I&O\\O&-I\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}I&\frac{1}{2}B_2\\O&I\end{pmatrix}P^{-1}}_{M^{-1}}$. (4 分)

3. $A\mathbf{x}=\mathbf{0}, B\mathbf{x}=\mathbf{0}, \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 同解，得 $\operatorname{rank}(A)=\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}$. (4 分)

   设 $\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_1\\P_2\end{pmatrix}Q$ 为满秩分解，则 $A=P_1Q,\ B=P_2Q$ 都为满秩分解. (4 分)

   设 P_1,P_2 分别是可逆方阵 M_1,M_2 的前 r 列，则 $B=M_2M_1^{-1}A$. (4 分)