2021年春季学期 调和分析 期末考试
授课教师：高强 博士后

- 考试时间：2021.6.29 下午 4:00-6:00。
- 分值：第 1 题 30 分，第 2 ,3 题各 10 分，第 4，5 题各 15 分，第 6 题 20 分。

1， 判断题

(1) 若 $f \in L^1$ 且 $\hat{f} \in L^1$，则 f 连续。
(2) 若 $f \in L^2$，则 $\hat{f} \in L^2$。
(3) 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $|f(x)| \le e^{-|x|^2}$，则 $f \in \mathcal{S}$。
(4) 对于任意 $g \in \mathcal{S}$，存在 $f \in \mathcal{S}$ 使得 $g = \hat{f}$。
(5) 设 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且存在多项式 $P(x)$ 使得 $|f(x)| \le |P(x)|$，则 $f \in \mathcal{S}'$。
(6) 若 μ 是广义函数，且 $\mathrm{supp}(\mu)$ 是紧的，则 $u \in \mathcal{S}'$。
(7) 若 $Mf \in L^1$，则 $f \equiv 0$。
(8) 设 T_1, T_2 是 Calderón-Zygmund 算子，且它们有相同的核函数，则 $T_1 = T_2$。
(9) 若 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$，则 $\int_{\mathbb{R}^n} f dx = 0$。
(10) 若 $|f| \in \mathrm{BMO}$，则 $f \in \mathrm{BMO}$。

2， 设 μ 是 $\mathbb{R}^n$ 上满足双倍条件的 Radon 测度。双倍条件，是指存在常数 A，使得对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 及 $r > 0$，有

$$\mu(B(x, 2r)) \le A\mu(B(x, r))。$$

设 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mu)$。定义非中心极大函数 (non-centered maximal function)

$$M_\mu f(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y)。$$

证明：存在常数 C 使得对于任意 $f \in L^1(\mu)$ 及 $\lambda > 0$，有不等式

$$\mu(\{M_\mu f > \lambda\}) \le \frac{C}{\lambda} ||f||_{L^1(\mu)}$$

3， 证明下述命题。

(1) 设 δ 是零点处的 Dirac 函数。计算 $(\partial^\alpha \delta)^\vee$。
(2) 设 $u \in \mathcal{S}'$ 且 $\Delta u = 0$。证明：u 是多项式。
(3) 若 $u(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数，且满足：

(a) 存在多项式 $P(x)$ 使得 $|u(x)| \le |P(x)|$。

(b) 存在常数 C 使得 $u(x) \ge C$。

证明：$u(x)$ 是常数。

(4) 证明代数基本定理：每个多项式在 $\mathbb{C}$ 上至少有一个根。

4，设 $\Omega(x, \theta)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数，且满足

(1) $\Omega(x, -\theta) = -\Omega(x, \theta)$。

(2) $\sup_x |\Omega(x, \theta)| \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$。

定义

$$T_\Omega f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|y|>\epsilon} \frac{\Omega(x, y/|y|)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

证明：对于任意 $p \in (1, +\infty)$，T_Ω 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子。

5，证明下述命题。

(1) 设 $p \in [1, +\infty)$。证明：若 $w \in A_p$，则 $\log w \in \mathrm{BMO}$。

(2) 若 $p > 1$，证明：$\mathrm{BMO} \overset{\supseteq}{=} \{\lambda \log w : \lambda > 0, w \in A_p\}$。

6，设 K 是缓增广函，且在 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 上，$K \in C^1(\mathbb{R}^n - \{0\})$。对于任意 $f \in \mathcal{S}$，定义算子 $Tf = K * f$。假设 K 及算子 T 满足：

(1) 存在 $p_0 \in (1, +\infty)$ 使得算子 T 在 L^{p_0} 上有界，即，$\|T\|_{L^{p_0} \to L^{p_0}} \le A$。

(2) 在 $\mathbb{R}^n - \{0\}$ 上，$|DK(x)| \le \frac{B}{|x|^{n+1}}$。

证明：

(1) $|\{x \in \mathbb{R}^n : |Tf| > \lambda\}| \le \frac{C_1}{\lambda}\|f\|_1$，且 C_1 满足：$C_1 \le C_n(A+B)$。其中，C_n 是只依赖于维数 n 的常数。

(2) 对于任意 $p \in (1, +\infty)$，存在常数 C_p 使得 $\|Tf\|_p \le C_p\|f\|_p$，且 C_p 满足：$C_p \le C_n'' \max(p, \frac{1}{p-1})(A+B)$。其中，$C_n''$ 是只依赖于维数 n 的常数。

(3) 若条件(1)中 $p_0 = 1$ 或 $p_0 = +\infty$，是否依然能得到算子 T 的强 (p,p) 连续性 $(p \in (1, +\infty))$？（不用证明）