2.21年秋季线性椭圆方程期中考试

1. (10) 调和函数有多种定义方式，写出其中3种.

2. (10) 判断正误（无需写明理由），设 u 为(1)弱解，则

(1) 若 $a^{ij}\in C^{\alpha}(B_1)$, $f\in L^q(B_1)$, $q>n$, 且 $\alpha=1-\frac{n}{q}$, 则 $u\in C^{1,\alpha}(B_1)$

(2) 若 $a^{ij}\in C^1(B_1)$, $f\in C(B_1)$, 则 $u\in C^2(B_1)$

(3) 若 $a^{ij}\in C^{1,\alpha}(B_1)$, $f\in C^{\alpha}(B_1)$, $\alpha\in(0,1)$, 则 $u\in C^{2,\alpha}(B_1)$

3. (50) 分别用De Giorgi迭代与Moser迭代证明，若 u 是方程(1)的弱解，$f\in L^q(B_1)$, $q>\frac{n}{2}$, 则对 $\forall\theta\in(0,1)$, $p>0$ 成立，

$$\sup_{B_\theta} u^+ \le C\left(\frac{1}{(1-\theta)^{\frac{n}{p}}}\|u^+\|_{L^p(B_1)}+\|f\|_{L^q(B_1)}\right)$$

$C=C(n,\lambda,\Lambda,p,q)$

（只需写 $\theta=\frac{1}{2}$, $p=2$ case，其中一个迭代方法可设 $f=0$）

4. (20) 所有条件同(3)，证明 $\exists\ \alpha\in(0,1)$ s.t. $u\in C^{\alpha}(B_1)$, $\alpha=\alpha(n,q,\lambda,\Lambda)$

（Harnack不等式可不证明直接使用）

5. (10) u 为 $Lu=0$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中弱解，证明

(1) u 有界 $\Rightarrow$ u 常数

(2) 若 $\exists$ 球 $B_r(x_0)\subset\mathbb{R}^n$ s.t. $\sup\limits_{B_r(x_0)} u=\sup\limits_{\mathbb{R}^n} u<+\infty \Rightarrow u$ 常数.

注. 方程均为 $B_1\subset\mathbb{R}^n\ (n\ge 3)$ 中的

$$Lu=-D_j(a^{ij}D_i u)=f(x) \qquad (1)$$

a^{ij} 满足 (λ,Λ) 一致椭圆

· 上下界 $\Rightarrow$ 本性上下界

· 迭代lemma可直接使用.