2021 秋季学期泛函分析期中考试

授课老师: 刘聪文

2021 年 11 月 20 日

1. 求
$$M_n = \{x \in l^2, x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots)\}$$
在 l^2 中的正交补 $M_n^{\perp}$.

2. 证
$$\left\{f \in L^2[1, +\infty) : \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} = 0\right\}$$
在 $L^2[1, +\infty)$ 上是闭子空间.

3. 证：赋范线性空间的线性真子空间无内点.

4. 设 $\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}, \{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是 Hilbert 空间 $\mathcal{X}$ 的两个正交规范集, 满足
$$\sum_{n=1}^{+\infty} ||e_n - f_n||^2 < 1.$$
求证：$\{e_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 和 $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 中一个完备蕴含另一个完备.

5. 证明：$\{\cos(n\pi t)\}_{n=1}^{+\infty}$ 在 $C[0, 1]$ 上不列紧，这里范数定义为 $||f|| = \max\limits_{t\in[0,1]} |f(t)|$.

6. 设 X, Y 是赋范线性空间，$T : X \to Y$ 是线性算子，且 $\dim X < \infty$，证明：$T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

7. 举例说明在一般的内积空间中 Riesz 表示定理不成立.