Memo No.
Date

（一～六题15'，七题10'）

一.（Ex1.4.4）在 $C[0,1]$ 中，对每一个 $f\in C[0,1]$，令 $\|f\|_1=(\int_0^1|f(x)|^2dx)^{1/2}$，$\|f\|_2=(\int_0^1(1+x)|f(x)|^2dx)^{1/2}$，求证 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 是 $C[0,1]$ 中两个等价范数.

二. 设 $T: C[0,1]\to C[0,1]$，$Tx(t)=\int_0^t x(s)ds$，求证 T 是紧算子.

三.（Ex2.4.13）设 M 是赋范空间 X 中闭子集，求证：$\forall x\in X\setminus M$，$\exists f_1\in X^*$ s.t. $\sup\limits_{y\in M} f_1(y)\le f_1(x)-d(x)$，其中 $d(x)=dist(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$.

四.（定理2.3.3）设 X 是Hilbert空间，$T\in\mathcal{L}(X)$，且 $\exists m>0$ s.t. $|(Tx,x)|\ge m\|x\|^2$，$\forall x\in X$，求证：T^{-1} 存在 $T^{-1}\in\mathcal{L}(X)$.

五. X 是可分赋范空间，求证：$\exists\{f_n\}\subset X^*$ s.t. $\forall x\in X$，都有 $\|x\|=\sup\limits_n|f_n(x)|$

六（Ex2.6.4）A: $l^2\to l^2$，$(x_1,x_2,\cdots)\mapsto(x_2,x_3,\cdots)$，求 $\sigma_p(A)$、$\sigma_c(A)$、$\sigma_r(A)$

七. X,Y 是实Hilbert空间，S_x 是 X 中单位球面，$T\in\mathcal{L}(X,Y)$，且不存在 $x\in S_x$ s.t. $\|Tx\|_Y=\|T\|$. 求证：存在 $\{x_n\}\subset S_x$ s.t. $x_n\xrightarrow{w}0$（弱收敛）且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|Tx_n\|_Y=\|T\|$.

简评：从今年的题目，建议以课后作业题为复习主体.

扫描全能王 创建