2021 秋泛函分析（H）期末

授课教师：黄文 时间：3 小时

一．设 Hilbert 空间X可分，M是X的稠密子空间，证明：M包含X的一个规范正交基。

二．设(M,d)是完备度量空间，F是M的一个非空紧子集，$T:F\to F$满足$\forall x\neq y, d(Tx,Ty)<d(x,y)$.证明：$T$在$F$上有唯一不动点。

三．设有赋范线性空间X,Y，证明：若$L(X,Y)$是 Banach 空间，则Y是 Banach 空间。

四．设$\{a_n\}$是$U=\left\{z\in\mathbb{C}\middle|\frac{1}{2}\leq|z|\leq 1\right\}$的稠密子集，$\{\sigma_n\}$是复 Hilbert 空间$l^2$的规范正交基，令

$$T(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx_n\sigma_n\,,(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)\in l^2$$

1. 证明T是 Fredholm 算子且$ind(T)=0$
2. 若n充分大的时候$\sigma_n=e_n$为只有第 n 个分量为 1，其他分量为 0.求$\sigma(T)$与$r_\sigma(T)$

五．证明：在l^1中弱收敛和强收敛等价。

六．设X,Y是 Banach 空间，线性算子$T:X\to Y$.令$N=\cap_{V\text{是 0 的邻域}}\overline{T(V)}$，证明：

1.N是Y的闭子空间

2.T连续当且仅当$N=\{0\}$

3.设$p: Y \rightarrow Y/N$是商映射，则$p \circ T$连续

七．设X是 Hilbert 空间，$T \in L(X)$，证明以下等价

1.$R(T)=X$

2.$\exists c>0$,使得$\|T^* x\| \geq c\|x\|, \forall x \in X$