2021 秋微分几何(H)期末

授课教师：张希 时间：2 小时

一、 设有曲面的正则参数(u^1,u^2)，第一基本形式$I=\left(f(u^1)\right)^2((du^1)^2+(du^2)^2)$，求$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$和 Gauss 曲率$K$.

二、(1) 设有可定向曲面Σ, $\{e_1,e_2,e_3\}$为其上整体定义的幺正标架，e_3为其法向。设$D_{e_1}e_1\cdot e_2=f_1, D_{e_2}e_2\cdot e_1=f_2$，$\boldsymbol{r}(s)$为$\Sigma$上的曲线与$e_1$夹角$\theta$，$s$为弧长参数，.证明：$\boldsymbol{r}$的测地曲率为$k_g=\frac{d\theta}{ds}+\cos\theta\, f_1-\sin\theta\, f_2$；

（2）设$\boldsymbol{r}(t)$为Σ上曲线，$\boldsymbol{V}(t)$为其切向量场。证明：$\boldsymbol{r}$为测地线当且仅当存在函数$\varphi(t)$，使得$\frac{D\boldsymbol{V}}{dt}=\varphi(t)\boldsymbol{V}$.

三、设p为正则曲面Σ上一点，$K(p)$为p处 Gauss 曲率，$L(r),A(r)$分别为以p为圆心的测地圆周长和半径。证明：$\pi^2K(P)=\lim\limits_{r\to 0}\frac{4\pi A(r)-L(r)^2}{r^4}$.

四、设(x,y)为曲面片Σ的正则参数，Σ的第一基本形式为$I=4(dx^2+dy^2)$.设C为Σ上的简单闭曲线，弧长L，围成的区域面积A。证明$L^2\le 4\pi A$.

五、(1）设Σ是紧致曲面，若存在Σ上函数f使得$K=\Delta_\Sigma f$，K为Σ的 Gauss 曲率，证明Σ上必有点 Gauss 曲率分别为正、负、零；

（2）若取紧致凸曲面的法向为外法向，证明其第二基本形式处处是半负定的。

六、设$\Sigma,\tilde{\Sigma}$为E^3中的紧致凸曲面，映射$f:\Sigma\to\tilde{\Sigma}$满足$f^*(I_{\tilde{\Sigma}})=aI_\Sigma$，其中$I_\Sigma,I_{\tilde{\Sigma}}$分别

为$\Sigma,\tilde{\Sigma}$的第一基本形式，f^*为f的拉回，a为正常数。证明：f是一一映射。