

# 中国科学技术大学期末试卷

2019-2020 学年第 2 学期 A 卷

1. (30 分) 填空

- (a) 求基本群  $\pi_1(S^1) =$  \_\_\_\_\_;
- (b) 求基本群  $\pi_1(3T^2) =$  \_\_\_\_\_;
- (c) 求基本群  $\pi_1(3P^2) =$  \_\_\_\_\_;
- (d)  $S^1 \subset \mathbf{E}^2 \subset \mathbf{E}^3$  为单位圆周, 求  $\mathbf{E}^3 \setminus S^1$  的基本群 \_\_\_\_\_;
- (e) 求同调群  $H_1(RP^2) =$  \_\_\_\_\_;
- (f) 设  $n \geq 1$ , 求同调群  $H_n(S^n) =$  \_\_\_\_\_;
- (g) 当  $n \geq 2$  时, 求基本群  $\pi_1(RP^2 \vee RP^n) =$  \_\_\_\_\_;
- (h) 找一拓扑空间, 其基本群为  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 =$  \_\_\_\_\_;
- (i) 找两个拓扑空间, 其基本群相同, 而同调群不同, \_\_\_\_\_;
- (j) 找两个拓扑空间, 其同调群相同, 而基本群不同, \_\_\_\_\_;

2. (8 分) 设  $A$  为拓扑空间  $X$  的子集, 证明:  $A$  的边界包含它的闭包的边界即  $\partial \bar{A} \subset \partial A$ .

3. (8 分)  $X, Y$  道路连通, 证明:  $X \times Y$  道路连通。

4. (10 分) 拓扑空间  $X$  是局部紧致的, 若任意  $x \in X$  都有紧致邻域。证明每一个局部紧致的 Hausdorff 空间满足 T3 公理。

5. (8 分) 设  $D^2$  为  $E^2$  中单位圆盘,  $\partial D^2$  为其边界,  $S^2$  为  $E^3$  中单位球面。证明:  $D^2 / \partial D^2 \cong S^2$ .

6. (8 分) 求  $S^1 \vee P^2$  的所有三层覆叠空间。

7. (10 分) 对  $P^2$  进行单纯剖分, 并根据单纯剖分求其同调群。

8. (10 分) 证明  $R^n$  与  $R^m$  同胚当且仅当  $n = m$ .

9. (8 分) 设  $n$  为偶数,  $f: S^n \rightarrow S^n$  连续, 则  $f^2$  有不动点。