**2020 年春 群与代数表示论 期末考试卷（闭卷）**

**姓名：__________　　　　　　　　学号：__________**

**（本卷中，$F$ 为域，群均为有限群，表示 (模) 均为有限维表示 (模)。从 7 道大题中选取 5 道做，满分 100 分，多做的题不计入总分。需要有详细解题过程。）**

**1. 设 $(V,\rho)$ 为群 $G$ 的 $F$-表示。令 $V^* := \mathrm{Hom}_F(V,F)$ 为 $V$ 的对偶空间。考虑映射 $\rho^*: G \to GL(V^*)$，其中 $\rho^*(g)(f)(v) := f(g^{-1}v)$, $\forall g \in G, f \in V^*, v \in V$. 证明：**

**(1) $(V^*,\rho^*)$ 为 $G$ 的 $F$-表示，称为 $(V,\rho)$ 的对偶表示；　(4')**
**(2) $(V,\rho)$ 不可约当且仅当 $(V^*,\rho^*)$ 不可约；　(4')**
**(3) $\chi_{\rho^*}(g) = \chi_\rho(g^{-1})$, $\forall g \in G$, 其中 $\chi_{\rho^*}$ $\chi_\rho$ 分别为 $\rho^*, \rho$ 的 $F$-特征标；　(4')**
**(4) 若 $(V_1,\rho_1)$，$(V_2,\rho_2)$ 均为 $G$ 的不可约 $F$-表示，则单位表示 $(F,\mathbf{1})$ 为 $V_1$ 与 $V_2$ 的张量积 $(V_1 \otimes V_2, \rho_1 \otimes \rho_2)$ 的 $F$-子表示当且仅当有表示同构 $(V_2,\rho_2) \cong (V_1^*,\rho_1^*)$.　(8')**

**2. $n$ 次对称群 $S_n$ 在集合 $X = \{x_1,\cdots,x_n\}$ 上有一自然作用，由此诱导出 $S_n$ 的置换表示 $(FX,\rho)$. 令 $V = \{\sum\limits_{i=1}^n a_i x_i \mid a_i \in F, \sum\limits_{i=1}^n a_i = 0\}$. 证明：**

**(1) $(V,\rho\mid_V)$ 为 $(FX,\rho)$ 的 $n-1$ 维 $F$-子表示；　(2')**
**(2) 若 $\mathrm{Char}F \neq 2$，则 $\mathrm{Hom}_G(V,V) = F$；　(4')**
**(3) 若 $\mathrm{Char}F$ 不整除 $n$，则 $V$ 是 $S_n$ 的不可约 $F$-表示；　(4')**
**(4) 求所有 6 阶群的所有不可约实表示 (同构意义下).　(10')**

**3. 设 $G = S_4$, $H = S_3$.**

**(1) 求 $H$ 的复特征标表；　(3')**
**(2) $\forall g \in G, h \in C_g$，证明：$\mid \{x \in G \mid x^{-1}gx = h\} \mid = \mid C_G(g) \mid$, 其中 $C_g$ 为 $g$ 在 $G$ 中的共轭类，$C_G(g)$ 为 $g$ 在 $G$ 中的中心化子；　(3')**
**(3) 求 $H$ 的每个不可约复特征标 $\chi$ 的诱导复特征标 $\chi^G$；　(7')**
**(4) 在 (2) 的基础上利用行列正交关系求 $G$ 的复特征标表.　(7')**

**4. 设 $A$ 是有限维 $F$-代数。**

**(1) 证明下述命题等价：　(14')**
**(a) $A$ 是半单代数 (即左正则 $A$-模 ${}_AA$ 是半单模)；**
**(b) 任一左 $A$-模是半单模；**
**(c) 任一左 $A$-模是投射模；**
**(d) 任一左 $A$-模是内射模；**
**(2) 设 $0 \neq a \in A$，考虑左乘映射 $l_a: A \to A$ 及右乘映射 $r_a: A \to A$, 其中 $l_a(x) = ax, r_a(x) = xa, \forall x \in A$. 证明：　(6')**
**(a) $l_a$ 是右 $A$-模同态；$r_a$ 是左 $A$-模同态；**
**(b) 若 $F$ 是代数闭域且 $A$ 是交换代数，则 $A$ 上的单模必是 1 维的.**

**5. 设 $A$ 是有限维 $F$-代数。考虑函子 $(-)^* := \mathrm{Hom}_F(-,F): A\text{-}\mathbf{mod} \to \mathbf{mod}\text{-}A$. 证明：**

**(1) $\forall M \in A$-mod, 有左 $A$-模同构：$M \cong M^{**}$；　(4')**
**(2) $(-)^*$ 是 fully faithful 函子，即有 $F$-同构：　(4')**

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M^*,N^*); \quad f \mapsto f^*;$$

**(3)** $(-)^*$ **将投射模变成内射模；将内射模变成投射模；　(4')**
**(4)** $S$ **是单模当且仅当** $S^*$ **是单模；　(4')**
**(5)** **设** $e \in A$ **为幂等元，**$M \in A$**-mod．则有左** $eAe$**-模同构:** $\mathrm{Hom}_A(Ae, M) \cong eM$**．　(4')**

**6．证明：有限维半单代数是对称代数。　(20')**

**7．设** $H$ **是 Frobenius 群** $G$ **的 Frobenius 补。证明:**
**(1)** $\forall g \in G$**,** ${}^gH$ **也是** $G$ **的 Frobenius 补; 且** $G$ **的任一 Frobenius 补为某个** ${}^gH$ **；　(6')**
**(2)** **若** $\theta \in \mathrm{cf}_{\mathbb{C}}(H)$ **且** $\theta(1) = 0$**，则** $(\theta^G)_H = \theta$**；　(4')**
**(3)** **若** $\theta = \varphi - \varphi(1)\mathbf{1_H}$**，其中** $\varphi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(H), \mathbf{1_H}$ **为** $H$ **的单位复特征标，则** $\theta^G + \varphi(1)\mathbf{1_G} \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(\mathbf{G})$**；　(5')**
**(4)** **若** $N$ **是相应的 Frobenius 核,** $(V, \rho) \in \overline{\mathrm{Irr}_F(G)}$ **且** $U$ **是** $(V, \rho_N)$**(即** $(V, \rho)$ **在** $N$ **上的限制表示) 的不可约** $F$**-子表示，则** $gU \in \overline{\mathrm{Irr}_F(N)}$**,** $\forall g \in G$**. (5')**