

中国科学技术大学

2019-2020春季学期实分析试卷

考试时间：2020年9月11日 8:30-10:30

主讲教师：赵立丰、郭经纬

姓名：_____ 学号：_____

注意：所有题目的解答要有详细过程，其中使用的定理或者命题需要注明。

请从第1题-第4题中选择三题作答。如果全做，取分数最高的三题计入总分。

1. (20分) 如果 f 是 \mathbb{R}^d 上的实值可积函数，并且对于任意的可测集 E ,

$$\int_E f(x) dx \geq 0.$$

证明： $f \geq 0$, a.e.

2. (20分) 判断下列命题是否正确。如果正确，不需要给出证明；如果错误，请举出反例。

- (1). 如果 E 是 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 中的可测集，则对于几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$,

$$E^y = \{x \in \mathbb{R}^{d_1} : (x, y) \in E\}$$

是 \mathbb{R}^{d_1} 中的可测集。

- (2). 如果对于几乎处处的 $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, E^y 是 \mathbb{R}^{d_1} 中的可测集，则 E 是 $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ 中的可测集。

3. (20分) 设 ν, ν_1, ν_2 是测度空间 (X, \mathcal{M}) 上的带号测度， μ 是 \mathcal{M} 上的(正)测度。证明：

- (1) 如果 $\nu \perp \mu, \nu \ll \mu$. 则 $\nu = 0$.

- (2) 如果 $\nu_1 \perp \nu_2$, 则 $|\nu_1| \perp |\nu_2|$

4. (20分) 设 f 是 \mathbb{R}^d 上不恒为零的可积函数，证明存在常数 $c > 0$ 使得对于所有的 $|x| \geq 1$,

$$f^*(x) \geq \frac{c}{|x|^d},$$

其中

$$f^*(x) = \sup_{x \in B} \frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

第5题-第7题为必答题.

5. (15分) 设 f_n 是区间 $[0, 1]$ 上的一列可测函数, 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \quad a.e. \quad x \in [0, 1]$$

且

$$\sup_n \|f_n\|_{L^2([0,1])} \leq 1.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^1([0,1])} = 0.$$

6. (15分) 令 m 表示 \mathbb{R} 上的 Lebesgue 测度, $A \subset \mathbb{R}$ 是 Lebesgue 可测集. 假设对于所有的实数 $a < b$,

$$m(A \cap [a, b]) < \frac{b-a}{2}.$$

证明: $m(A) = 0$.

7. (15分) 若 f 在 \mathbb{R} 上绝对连续, 且 $f \in L^1(\mathbb{R})$. 如果

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| dx = 0,$$

证明: $f \equiv 0$.