2020年春季学期实分析(H)期中考试

整理人：杨笑东

主讲教师：任广斌

1. 设$\{f_i\}_{i\in I}$是可测函数族，$g = \sup_{i\in I} f_i$. 当I是可数集时，g是否可测？I是不可数集时，g是否可测？证明你的结论。

2. 证明：非空完全集不可数。

3. 设X是无穷集，证明：X与$X \times X$等势。

4. 设有可积函数列f_n和f, 满足$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n^2}$，$\forall n$. 证明$f_n \xrightarrow{a.e.} f$.

5. 证明：存在$f : [0,1] \to [0,1]$满足f'存在且可积，并满足不等式$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0)$.

6. 证明：存在不可测集W，其可测子集必是零测集。

7. 求极限$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{\sqrt{nx}}{1+nx}dx$和$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 (1 + x^{2n})^{1/n}dx$.

8. 设$f : [0.1] \to [-1,1]$满足:$\forall n$, $\forall x_1, x_2, \cdots, x_n \in [0,1]$都有$|\sum_{k=1}^n f(x_k)| \le 1$. 证明:$f = 0$ a.e.

9. 设$\mathbb{R}$上$m(E) < \infty$，f为E上的可测函数，证明：对任意$\epsilon > 0$存在有界可测函数g，使得$m\{x \in E : f(x) \ne g(x)\} < \epsilon$.

10. 设C为标准Cantor集。证明C没有内点，$\{(x, y) : e^x y \in C\}$是$\mathbb{R}^2$上的可测集。并进一步证明：存在没有内点的正测度集。