2019-2020学年第2学期期末考试
(复分析)

一、(40分)计算题、

1. 求下列复数的模和辐角:

$$1+i \qquad\qquad i^{i}.$$

2. 计算积分 $I=\int_{|z|=1}\frac{dz}{z(3z+1)}$.

3. 求下列函数在$\{z\in\mathbb{C}\mid 0<|z|<1\}$和$\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<\infty\}$中的Laurent展式:

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)}.$$

4. 设 $f_1(z)=\frac{1}{1+z^2}$, $f_2(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$, 求 $f_1(z)$ 和 $f_2(z)$ 在 $z=i$ 点留数.

二. (10分) 求分式线性变换 $w=L(z)$, 使其将单位圆盘映为单位圆盘, 且满足条件 $L(\frac{i}{2})=0$, $L'(\frac{i}{2})>0$.

三. (10分) 设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是整函数, 且满足 $|f(z)|\geq 10|g(z)|$. $\forall z\in\mathbb{C}$.
是否存在常数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 使得下式成立?

$$f(z)=\lambda g(z), \quad \forall \lambda\in\mathbb{C}.$$

判断并说明理由。

四. (10分) (1) 证明Jordan引理: 若函数 $f(z)$ 在 $R_0\leq|z|<+\infty$, $\mathrm{Im}\, z\geq 0$ 上连续, 且 $\lim\limits_{\substack{z\to\infty\\ \mathrm{Im} z\geq 0}} f(z)=0$. 则有 $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} e^{iaz}f(z)\,dz=0$, 其中 a 是正常数, $\gamma_R: z=Re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq\pi$. $R>R_0$.

(2) 利用Jordan引理和留数定理计算积分 $I=\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$.

五、(10分)

(1) 叙述 Rouché 定理；

(2) 求方程 $kz^4=\sin z\ (k>2)$ 在 $|z|<1$ 内根的个数(计算重数在内)

六、(10分) 求证：

(1) 设区域 D 位于虚轴的一侧，其边界包含虚轴上的开线段 S，D' 是 D 关于虚轴的对称区域。若函数 $f(z)$ 在 D 内全纯，在 $D\cup S$ 上连续，且在 S 上取值纯虚数(即 $f(S)\subset i\mathbb{R}$)。求证：存在函数 $F(z)$ 在区域 $\Omega=D\cup S\cup D'$ 上全纯，且在 D 内满足 $F(z)=f(z)$，并写出 $F(z)$ 的具体表达式。

(2) 设 $f(z)$ 是一个整函数，若 $w=f(z)$ 定义的变换将实轴映为实轴，将虚轴映为虚轴，则 $f(z)$ 是一个奇函数。

七、(10分) 设 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ 且 $R>0$。设 $f:\overline{\mathbb{D}}\to\mathbb{C}$ 是满足如下性质的连续复值函数：

(1) $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 上全纯；

(2) $f(0)=0$，$f'(0)=1$；

(3) $\sup_{\overline{\mathbb{D}}}|f(z)|\le R$.

由于 $f'(0)=1$，易知存在 $\delta>0$ 使得 $f(z)$ 将 $D_\delta=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<\delta\}$ 共形映为 $f(D_\delta)$。

求证：(a) 关于 δ 的方程 $2R\delta=(1-\delta)^3$ 在闭区间 $[0,1]$ 上存在唯一解；

(b) 设 δ^* 是上述唯一解，若 $0<r<\delta^*$，则 $f(z)$ 是 $\mathbb{D}_r$ 到 $f(\mathbb{D}_r)$ 的共形映射。