

**中国科学技术大学2020年春  
复分析 (H) 期末考试试卷**

2020年9月1日

姓名: \_\_\_\_\_ 系别: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	总分
得分										
阅卷人										

1. (10分) 计算下列积分.

(1)  $\int_{|z|=2} (z + \bar{z}) dz$ ;      (2)  $\int_{|z|=2} \frac{z}{z^5 - 1} dz$ ;

2. (24分) 判断下列说法是否正确, 说明理由.

(1) 设  $f$  为域  $D$  上的全纯函数且  $|f(z)|$  为常数, 则  $f$  为常数.

(2)  $f(z) = \frac{1}{z}$  在单位圆周上可以被多项式一致逼近.

(3) 设  $f$  为非常值整函数, 则当  $z \rightarrow \infty$  时,  $|f(z)| \rightarrow \infty$ .

(4) 存在单位圆盘  $\mathbb{D}$  上的全纯函数  $f$ , 使得对任意  $z \in \mathbb{D}$ , 都有  $|f(z)| = |z|^2 + 1$ .

3. (10分) 求函数  $\frac{z^2 - 1}{(z + 2)(z + 3)}$  在  $2 < |z| < 3$  和  $3 < |z| < +\infty$  中的 Laurent 展式.

4. (10分) 设函数  $f(z)$  在单位圆  $|z| < 1$  中全纯,  $f(0) = 0$ ,  $\text{Im}f(z) \leq 1$ .  
证明:

$$|f(z)| \leq \frac{2|z|}{1 - |z|}.$$

5. (10分) 求共形映射  $f$  将区域  $D = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Im}z < 1\}$  映为单位圆盘且  $f(0) = 0$ .

6. (10分) 计算积分  $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$ .

7. (10分) 证明: 非整数阶的有限阶整函数必有无穷多个零点.

8. (8分) 设  $f$  在单位圆盘  $|z| < 1$  中全纯, 且存在常数  $M > 0$ , 使得

$$\sup_{r \in [0,1)} \int_0^{2\pi} |f'(re^{it})| dt < M.$$

证明:  $\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$ .

9. (8分) 设  $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ ,  $G = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ . 证明: 不存在从  $D$  到  $G$  的双全纯映射.