

2020年夏令营考试

分析学

2020年7月21日

- 1、正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。证明：存在收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty$.
- 2、设 $\pi = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. 证明 $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^\pi \frac{q^n}{n!} x^n (\pi - x)^n \sin x dx$ 是整数.
3. 设区域 $D := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f \in C^2(D)$ 满足 $\Delta f(x, y) + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ in D . 计算积分 $\int_D x \partial_x f + y \partial_y f dx dy$.
4. 设 $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(x+1) = f(x)$, $f(0) = 0$, $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f''(x)| = 1$. 证明: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
5. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ 且对几乎处处大于0。若有可测集 $A \in \mathbb{R}^d$ 满足 $\int_A f dx = 0$, 证明 A 是零测集。
6. 设 $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 。证明： $\forall a > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^a f(nx) dx = aA$.
7. 设全纯函数 f, g 满足 $f(a) = g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$. 证明 $z = a$ 是 $h = f/g$ 的可去奇点。
8. 问：是否存在非常值的整函数 $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ 使得 $f(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{|z| < 1\}$?