整理：周佳诺
授课教师：刘永强

代数学期中考试

（本试卷中 R 表示含幺交换环）

1. 求出PID上的所有有限生成投射模、内射模和平坦模并证明。

2. 设 $R=\mathbb{Z}_6$，R 的理想 $I=(3)$ 作为 R-模是投射、内射、平坦的吗？证明你的结论。

3. 设有 R-模组成的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
 & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \\
 & A'' \arrow[r] \arrow[d] & B'' \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

其中每行每列都正合。证明 $A''\to B''$ 为单射。

4. 设 R 为PID，M 为有限生成-R 模，证明对于任意素理想 P 有

$$\operatorname{rank}(M)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{d}_P(P^nM)$$

(注：$\mathrm{d}_P(M)=\dim_{R/P}(M/PM)$)

5. 设 C 为范畴，$f, g : X \to Y$ 为两个态射。称态射 $h : H \to X$ 为 f 和 g 的 equalizer，如果 $fh = gh$ 且对任意满足 $fu = gu$ 的态射 $u : U \to X$，唯一存在态射 $s : U \to H$ 使得 $u = hs$。

   (a) 证明如果 equalizer 存在则在相差一个同构的意义下唯一。

   (b) 证明 equalizer 必为单射。

6. 设 $R = k[x, y]$，其中 k 为交换环。设有 R-模 $M_1 = k[x, y, y^{-1}]/k[x, y]$ 和 $M_2 = k[x, y, x^{-1}]/k[x, y]$。设 $M = M_1 \oplus M_2$，证明 $M \otimes_R M \otimes_R M = 0$。

7. 设 $A = \{(1, n), (n, 1), (n, n)\} \subset \mathbb{Z}^2$，$M$ 为 A 生成的 $\mathbb{Z}^2$ 的子 $\mathbb{Z}$-模。证明 M 是自由 $\mathbb{Z}$-模，$\mathbb{Z}^2/M = \mathbb{Z}_{n-1}$，且不能在 A 中选取 M 的一组基。

finitely-presented: $R^n \longrightarrow R^m \longrightarrow M \longrightarrow 0$

8. 设 M 是 ~~有限生成~~ R-模，$f : R^m \to M$ 为满射。证明 $\ker(f)$ 是有限生成 R-模。