

中国科学技术大学数学科学学院
2019~2020 学年第 2 学期期中考试试卷

A 卷 B 卷

课程名称 近世代数 课程编号 001010
考试时间 2020 年 5 月 13 日 考试形式 开卷
姓名 学号 学院

考试注意事项

- 🔔 考试时间为 2020 年 5 月 13 日上午 7:50–9:25. 考试开卷, 所有考生独立完成试卷.
- 🔔 交卷时间为 2020 年 5 月 13 日上午 9:25–9:40. 交卷时, 考生应该及时将完成的答题内容扫描成 PDF 文件格式, 上传至 BlackBoard 系统的相应位置.
- 🔔 考生在自备的答题页的首页承诺 “**已阅读考试注意事项, 愿意遵守学校考试纪律, 独立完成试卷, 并且不泄露考题**”, 签名, 并写好学号和所在学院. 签名字迹潦草的, 要求另外正体书写姓名.

考试试题

- 一、(10 分) 对于群 G 中的任意元素 a, b, c , 证明 abc, bca, cab 这三个元素有相同的阶.
- 二、(10 分)
 - (1) 证明任何一个群都不可能为两个真子群的并集;
 - (2) 举例说明存在一个群为它的三个真子群的并集.
- 三、(10 分) 设 H, K 为群 G 的子群, $a, b \in G$ 满足 $aH = bK$. 证明 $H = K$.
- 四、(10 分) 若 n 阶有限群 G 为交换群, 且 n 是 G 中所有元素的阶的最小公倍数, 证明 G 是一个循环群.
- 五、(10 分)
 - (1) 把置换 $(456)(567)(671)(123)(234)(345) \in \mathcal{S}_7$ 表示为不相交轮换的乘积.

(2) 对于对称群 \mathcal{S}_7 中的元素 $\sigma = (327)(14)(26)$ 和 $\tau = (57)(134)$, 分别计算 $\sigma\tau\sigma^{-1}$ 和 $\sigma^{-1}\tau\sigma$.

六、(10 分) 简要证明交错群 \mathcal{A}_5 不存在 30 阶子群.

七、(10 分) 证明 35 阶群必为循环群.

八、(10 分) 设 x, y 为非零含么环 R 中的元素, 且 $1 + xy$ 在 R 中可逆, 证明 $1 + yx$ 也在 R 中可逆.

九、(10 分) 设 R 是一个非零含么交换环, 证明 R 中的每个理想都是有限生成的, 当且仅当 R 中任意理想的升链 $I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$ 都是稳定的, 即存在正整数 N , 使得对任意的 $n \geq N$ 都有 $I_n = I_N$.

十、(10 分) 设 R 是一个非零含么交换环, $I = (a_1, \dots, a_n)$ 为 R 中的非零理想. 证明集合

$$\{ J \text{ 为 } R \text{ 的理想} \mid J \not\subseteq I \}$$

关于包含关系存在极大元.