

中国科学技术大学数学科学学院  
2019~2020 学年第2 学期期中考试试卷

A卷      B卷

课程名称 近世代数      课程编号 001010  
考试时间 2020年5月13日      考试形式 开卷  
姓名                           学号                           学院                     

**考试注意事项**

考试时间为2020年5月13日上午9:45–11:20. 考试开卷, 所有考生独立完成试卷.  
交卷时间为2020年5月13日上午11:20–11:30. 交卷时, **考生应该及时将完成的答题内容扫描成PDF 文件格式, 上传至BlackBoard 系统的相应位置(以作业形式提交).**  
卷面总分100分, 题目难易没有先后, 请合理安排时间.

**考试试题**

(10分) 1. 考生承诺并且在答题纸开头**工整地抄写“已阅读考试注意事项, 愿意遵守学校考试纪律, 独立完成试卷”**, 签名, 并写好学号和所在学院. **注意, 从6,7,8,9题中选做3题即可**

(15分) 2. 设  $\sigma = (2134)(156)(25)(237) \in S_7$ . (1) 将  $\sigma$  写成不相交轮换的乘积; (2) 求和  $\sigma$  共轭的元素个数; (3) 求  $S_7$  中和  $\sigma$  可交换的偶置换的个数.

(15分) 3. 设  $p$  是一个奇素数, 令  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . (1) 列举  $\mathbb{F}_p^*$  的二阶元; (2) 证明  $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ .

(15分) 4. (1) 125阶Abel群的分类; (2) 证明: 125阶非交换群的中心是非平凡的, 而且是5阶的.

(15分) 5. 设  $R$  是一个交换幺环, (1) 设理想集合  $\{I_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$  按照包含关系是一个链, 即, 对任意  $\alpha, \beta \in \Lambda$ , 有  $I_\alpha \subseteq I_\beta$  或者  $I_\beta \subseteq I_\alpha$ . 那么  $\bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$  是  $R$  的理想. (2) 设  $R$  是一个交换幺环,  $a, b$  是  $R$  中的非零因子, 证明存在素理想  $P$  不包含  $a, b$ .

从6,7,8,9题中选做3题

(10分) 6. 设 $p$ 是素数, (1) 环 $\mathbb{F}_p[x]/(x^2 + x)$ 是否是整环; (2) 加法群 $\mathbb{F}_p[x]/(x^2 + x)$ 是否是循环群, 阶数多少?

(10分) 7. 设 $G$ 是一个有限群,  $N \triangleleft G$ ,  $P$ 为 $G$ 的Sylow  $p$ -子群, 证明(1) 集合 $PN$ 是 $G$ 的子群; (2)  $P \cap N$ 是 $N$ 的Sylow  $p$ -子群.

(10分) 8. 列举群 $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$  到 $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$  的群同态.

(10分) 9. 设 $e = (3, 4, 5) \in \mathbb{Z}^3$ , 将 $e$ 扩充为 $\mathbb{Z}^3$ 的基.