

中国科学技术大学

2019–2020学年第二学期期中考试

考试科目：近世代数

得分_____

学生所在系：_____

学号_____

姓名_____

考试时间：9:45 – 11:45

交卷时间：11:45 – 12:00

注意：论证需详细，按步骤给分。

1. 考虑Gauss整数环 $R = \mathbb{Z}[i]$.

(1) 设 $p \in \mathbb{Z}$ 是奇素数。试证明： $x^n - p \in R[x]$ 总是不可约的。

(2) 在 R 中，将 $81 + 8i$ 分解为不可约元的乘积。

(3) 求不定方程 $x^2 + y^2 = 585$ 的所有整数解。

(4) 考虑商环 $R_1 = R/(3)$ 以及 $R_2 = R/(5)$ 。计算：环自同构群 $\text{Aut}(R_1)$ 以及 $\text{Aut}(R_2)$ 的阶数。

2. 考虑多项式环 $\mathbb{Q}[x]$ 。设 S 为其包含 \mathbb{Q} 以及 x^2, x^3 的最小子环。

(1) 试证明： S 同构于 $\mathbb{Q}[y, z]/(y^2 - z^3)$ 。

(2) 试证明： S 不同构于 $\mathbb{Q}[x]$ 。

(3) 试证明： S 的分式域同构于有理函数域 $\mathbb{Q}(x)$ 。

装订线 答题时请不要超过此线

3. 设 E 为 $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ 在 \mathbb{Q} 上的分裂域。

(1) 计算维数 $\dim_{\mathbb{Q}} E = [E : \mathbb{Q}]$.

(2) 试列出域自同构群 $\text{Aut}(E)$ 中的元素。

(3) 设 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ 。试给出自同构群 $\text{Aut}(K)$ 中的元素，并给出 K 的所有非平凡子域。

(4) 设 $u = \sqrt[4]{2} + i$ 。试求： u 在 \mathbb{Q} 上的最小多项式。

4. 设 (R, ϕ) 是欧式整环， $a \in R$ 是 R 中所有非零非单位元素中 $\phi(a)$ 取值最小的。

(1) 试证明： $R/(a) = \{\bar{r} \mid r = 0 \text{ 或为 } R \text{ 中乘法可逆元}\}$ ，这里， $\bar{r} = r + (a)$ 表示其模 (a) 同余类。

(2) 试证明： $R = \mathbb{Z}[(1 + \sqrt{-19})/2]$ 不是欧式整环。(提示：利用(1)，研究 R 的单位，分析可能的 $a \in R$ 。)