（装订线内不要答题）

中国科学技术大学数学科学学院

2020学年春季学期期末考试试卷

A 卷

课程名称： 多复变函数论 **课程代码：** MA04409

开课院系： 数学科学学院 **考试形式：** 闭卷

姓　名：＿＿＿＿＿＿ **学　号：**＿＿＿＿＿＿ **专　业：**＿＿＿＿＿＿

一、**(10分)** 试证：$\mathbb{C}^2$上的全纯函数没有孤立零点。（注：不能直接用Hartogs定理）

二、(10分)

考虑$P = \frac{d}{dx} : L^2((0,1)) \to L^2((0,1))$。（这里 P 取分布意义下）

(1) 试证：P 是闭的稠定算子。

(2) 计算Dom_{P^*}。这里 P^* 是 Hilbert 伴随算子。（需要详细计算过程）

（装订线内不要答题）

三、**(20分)** 令 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中的任一区域。 证明：

(1) 给定 f，存在解 u 满足 $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} u = f$ 且

$$\int |u|^2 e^{-\phi} \leq C,$$

当且仅当对所有的 $\alpha \in C_0^2(\Omega)$,

$$|\int f \bar{\alpha} e^{-\phi}|^2 \leq C \int |\bar{\partial}_\phi^* \alpha|^2 e^{-\phi}.$$

(2) 对给定的函数 $\mu > 0$，上式对所有满足

$$\int \frac{|f|^2}{\mu} e^{-\phi} \leq C$$

的 f 成立当且仅当

$$\int \mu |\alpha|^2 e^{-\phi} \leq \int |\bar{\partial}_\phi^* \alpha|^2 e^{-\phi}$$

对所有的 $\alpha \in C_0^2(\Omega)$ 成立。

四、(20分) 叙述 $\mathbb{C}^n$ 上拟凸域上的L^2 存在性定理（Hormander 估计），并以此证明 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域是全纯域如果它是拟凸域。

五、(20分)

(1) 叙述 Cartan A、B 定理。

(2) 用 Cartan B 定理证明 Cartan A 定理。

六、(20分)

试证：

(1) 令 $\mathcal{F}$ 为拟凸域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的解析凝聚层。假设存在有限个 $f_1, ..., f_k \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$ 使得对任意的$z \in \Omega$，$f_{1_z}, ..., f_{k_z}$ 生成 $\mathcal{F}_z$。 那么对任意的 $g \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F})$，存在 $g_1, ..., g_k \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O})$ 使得$g = f_1 g_1 + \cdots f_k g_k$。

(2) 若 $f_1, ..., f_k$ 是拟凸域 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 上的全纯函数使得 f_j 没有公共零点，则存在 Ω 上的全纯函数 $a_1, ..., a_k$ 使得 $\sum_{j=1}^k a_j f_j = 1$ 成立。

(3) 令 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 为拟凸域， $0 \in \Omega$。令 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 为全纯函数使得 $f(0) = 0$。那么存在 Ω 上的全纯函数 $f_1, ..., f_n$ 使得 $z_1 f_1 + \cdots z_n f_n = f$ 在 Ω 上成立。