

中国科学技术大学数学科学学院
博士入学考试之代数学, 2020年6月

注: 解题需给出详细论证过程, 字迹务必工整。

1. (40分) 考虑一元复系数Laurent多项式环

$$\mathbb{C}[x, x^{-1}] = \left\{ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \mid \text{仅有有限多个非零系数 } a_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

这里, 我们约定 $x^0 = 1$ 。

- (1) 试判断并论证: $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 是否为Noether环? 是否为Artin环?
- (2) 具体列出并论证: $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ 的所有极大理想与素理想。
- (3) 有自然环嵌入 $\mathbb{C}[x, x^{-1}] \hookrightarrow \mathbb{C}(x)$, 其中 $\mathbb{C}(x)$ 为有理函数域。于是, 自然视 $\mathbb{C}(x)$ 为 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ -模。试判断并论证: 此模是否不可分解? 是否为Noether模?
- (4) 考虑商环 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]/(x^4 - x)$ 与 $\mathbb{C}[x, x^{-1}]/(x^4 - x^2)$ 。试判断并论证: 这两个商环是否同构?

2. (30分) 考虑三阶循环群 $G = \langle g \mid g^3 = 1 \rangle$, 以及其群代数 $\mathbb{C}G$ 与 $\mathbb{R}G$ 。

- (1) 具体构造: 作为复代数, $\mathbb{C}G$ 与 $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 之间的同构。
- (2) 具体给出 G 的所有不可分解实表示。
- (3) 判断并论证: 是否存在环同构 $\mathbb{R}G \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$?

3. (30分) 考虑三元域 \mathbb{F}_3 , 以及 G 为上述三阶循环群。

- (1) 试判断并论证: 是否存在环同构 $\mathbb{F}_3 G \simeq \mathbb{F}_3[y]/(y^3)$?
- (2) 试给出 $\mathbb{F}_3 G$ 上所有单模。
- (3) 试判断并论证: 商环 $\mathbb{F}_3[y]/(y^3 - y + \bar{1})$ 是否为整环? 试给出商环 $\mathbb{F}_3[y]/(y^3 - y + \bar{1})$ 的所有子环。