2020年春季学期微分方程2期末考试

整理与录入：王浩然、章俊彦

2020年9月2日　8:30-11:30　主讲教师: 麻希南

一、（30分）

1. 设$U \subseteq \mathbb{R}^n$为边界C^1的有界连通开集，$1 \leq p \leq \infty$. 证明：存在仅依赖于n, p, U的常数$C > 0$使得$\forall u \in W^{1,p}(U)$有

$$\|u - (u)_U\|_{L^p(U)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

2. 设$U \subseteq \mathbb{R}^n$为边界C^∞的有界连通开集, $u \in C^2(\bar{U})$且$\frac{\partial u}{\partial N}|_{\partial U} = 0$. 证明:

$$\|\nabla u\|_{L^2(U)} \leq C\|\Delta u\|_{L^2(U)},$$

这里C是第一问中的常数。

3. 设$u(x) = |x|^a \in H^1(B(0,1))$, $x \in \mathbb{R}^3$, 求a的取值范围。

二、（20分）设$u(x, y)$是如下微分方程的解

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & in\ B(0,1) \in \mathbb{R}^2 \\ u = \sin y & on\ \partial B(0,1). \end{cases}$$

1. 求$u(0,0)$的取值

2. 求$\inf_{u-(1+|x|) \in H_0^1(B(0,1))} \int_{B(0,1)} (u + |\nabla u|)dx$.

三、（20分）设区域$U = (0,\pi) \times (0,\pi)$, $u(x.y)$是如下方程的解

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U. \end{cases}$$

1. 求该问题的第一、第二特征值及其对应的特征函数

2. 对哪些a，如下方程至少存在一个解？为什么？

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 4x - a & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U. \end{cases}$$

四、（20分）设$U \subseteq \mathbb{R}^n$为边界C^1的有界连通开集，$c \in L^\infty(U)$, $f \in L^2(U)$, $u \in H_0^1(U)$是

$$\begin{cases} \Delta u + cu = f & in\ U \\ u = 0 & on\ \partial U. \end{cases}$$

的弱解.

1. 证明对任意开集$W \subset\subset U$有

$$\|u\|_{H^1(W)} \leq C(W, U, \|c\|_{L^\infty})(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

2. 进一步假设$U = B(0,1) \cap \mathbb{R}^n_+$, $V = B(0,1/2) \cap \mathbb{R}^n_+$. 证明: 内部正则性估计成立

$$\|u\|_{H^2(V)} \le C(\|c\|_{L^\infty})(\|f\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(U)}).$$

五、（10分）设$u \in C^2(B(0,1))$是$\Delta u + c(x)u = 0$的一个正解(即$u > 0$), 其中$c \in C^\infty(\overline{B(0,1)})$. 证明：存在常数$C(n, \|c\|_{C^1}) > 0$，使得如下估计成立

$$\sup_{B(0,1/2)} |\nabla \log u| \le C.$$

六、（20分）设$U \subseteq \mathbb{R}^n$为边界C^∞的有界连通开集，$U_T := U \times (0,T)$.

1. 设$f \in C^\infty(\overline{U_T})$, $g \in H_0^1(U)$. 若$u \in C^\infty(\overline{U_T})$满足方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(x,t) & in\ U_T \\ u = 0 & on\ \partial U \\ u(x,0) = g(x) & on\ \{t=0\}. \end{cases}$$

证明：对$t \in [0,T]$存在常数$C = C(n) > 0$使得

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(\cdot,t)\|_{L^2(U)} + \|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} \le C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Omega)}).$$

2. $f \in C^\infty(\overline{U_T})$, $g, h \in C^\infty(\overline{U})$, u满足如下方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f(x,t) & in\ U_T \\ \frac{\partial u}{\partial N} = 0 & on\ \partial U \\ u(x,0) = g(x), \partial_t u(x,0) = h(x) & on\ \{t=0\}. \end{cases}$$

其能量泛函为$E(t) := \frac{1}{2}\int_U (\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 dx$. 证明: $\forall t \in [0,T]$存在常数$C = C(T) > 0$使得

$$E(t) \le C\left(E(0) + \int_0^T \int_U f^2\, dxdt\right).$$

七、（30分）(整理者注：这道题曾经是2017年微分方程2期末考试备选题，后被梁兴老师否决。此题前3问可以在Evans的第9章第4节找到)

设$d \ge 3$, 有界、连通且边界光滑的开集$U \subset \mathbb{R}^d$是关于0的星形域, 即对于任意$x \in \bar{U}$, $\{ax | 0 \le a \le 1\} \subseteq \bar{U}$. 且已知$x \cdot N(x) \ge 0\ \ on\ \partial U$. 设$u \in C^2(\bar{U})$满足方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-1}u \ \ in\ U \\ \qquad\quad u = 0\ \ on\ \partial U. \end{cases}$$

1. (原试卷没有第一问)证明:

$$\int_U |Du|^2 dx = \int_U |u|^{p+1} dx.$$

2. (Derrick-Pohozaev恒等式) 利用在方程两边同时乘以$(x \cdot Du)$并在U上积分, 证明:

$$\left(\frac{d-2}{2}\right)\int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial U} |Du|^2 (N \cdot x) dS = \frac{d}{p+1}\int_U |u|^{p+1} dx$$

3. 证明当$p > \frac{d+2}{d-2}$时, 原方程只有零解.

4. 设在三维空间中$v \in C^\infty(\overline{B(0,1)})$是方程$v\Delta v = \frac{3}{2}|\nabla v|^2$的正解。利用中方程两边同时乘以$v^{-b}(x \cdot \nabla v)$后分部积分($b$为待定系数)去证明如下恒等式：

$$-\frac{1}{2}\int_{B(0,1)} v^{-3}|\nabla v|^2 dx = \int_{\partial B(0,1)} \left(v^{-3}(v \cdot N)^2 - \frac{1}{2}v^{-3}|\nabla v|^2\right) dS.$$