2020年春季学期微分方程2(H)期末考试

整理与录入：邵锋、章俊彦

2020年8月31日　8:30-10:30　主讲教师: 韦勇

若不加以说明，本试卷中U均为$\mathbb{R}^n$中边界光滑的有界开集

〇、有40分基本概念题

一、设$u \in H^1(U)$, 其在边界上的迹记作Tu. 证明不等式$\|u\|_{H^1(U)}^2 \lesssim \|\nabla u\|_{L^2(U)}^2 + |Tu|_{L^2(\partial U)}^2$.

二、考虑微分方程

$$\begin{cases} -\Delta u + u^{\frac{n}{n-2}} = f & in\ U; \\ u = 0 & on\ \partial U. \end{cases}$$

称u是该方程的H^1-弱解，是指对任意的$v \in H^1(U)$成立

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v + u^{\frac{n}{n-2}} v\ dx = \int_U f v\ dx.$$

证明该方程的H^1-弱解存在性，并证明该弱解$u \in H^2$（即$H^2(U)$正则性估计）。

三、考虑微分方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & in\ U; \\ u = 0 & on\ \partial U. \end{cases}$$

证明其H^1-弱解存在性和能量估计。

四、抛物方程极大值原理的简单应用。

五、考虑p-Laplace方程($p \geq 2$)

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + \lambda u^{\frac{p}{p-2}} = f & in\ U; \\ u = 0 & on\ \partial U. \end{cases}$$

利用变分法证明其解的存在性。