授课教师：赵立丰
教材：谷超豪、李大潜
《数学物理方程》

中国科学技术大学
2020-2021秋季学期微分方程I期末试卷

姓名：________________ 学号：________________

注意:未按题目中规定的方法进行计算，不给分. 计算题只写结果不写过程，不给分. 所有题目中使用的定理、命题或者结论需要注明.

1. (a) (15分)用分离变量法解下列弦振动方程

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -2b\partial_t u + g(x,t), & 0 < x < l,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

其中$b > 0$是常数.

(b) (15分)用能量方法证明解的唯一性.

2. (a) (15分)求解方程

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \vec{b} \cdot \nabla u, & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0,\infty) \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

其中$\vec{b} = (1, 1, \cdots, 1)$. (提示：用Fourier变换方法或者其它方法.)

(b) (5分)若u_0是可积函数, 当$t \to +\infty$时, 解的渐近性态如何?

3. (10分)设u, v分别满足$\mathbb{R}^3$上的波动方程$\partial_t^2 u - \Delta u = f(x,t)$, $\partial_t^2 v - \Delta v = (f 1_E)(x,t)$, 其中$E = \{(x,t) |\ |x| > |t|\}$, $1_E(t,x)$表示E上的示性函数. 并且$u(0) = v(0)$, $\partial_t u(0) = \partial_t v(0)$. 证明: 当$|x| > |t|$时, $u(x,t) = v(x,t)$.

4. 设Ω是$\mathbb{R}^3$中的有界区域并且边界是光滑的. 设$x_0 \in \Omega$, $G(x, x_0)$表示Ω上的格林函数.

(a) (10分)证明格林函数是唯一的.

(b) (10分)证明: 对于任意的$x \in \Omega \backslash \{x_0\}$, $-\frac{1}{4\pi|x-x_0|} < G(x,x_0) < 0$.

5. (20分)称函数u在$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上是次调和的, 如果在$\Omega$上$\Delta u \geq 0$. 证明: $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$是次调和的, 当且仅当对于任意的球$B(x_0, r) \subset \Omega$, 有

$$u(x_0) \leq \frac{1}{4\pi r^2} \int_{|\omega|=1} u(x_0 + r\omega) dS(\omega).$$