中国科学技术大学
2020-2021 秋季学期微分方程 I 期中试卷

整理：邵锋

授课教师：赵立丰、宁吴庆

姓名： ________________ **学号：** ________________

注意: 计算题只写结果不写过程，不给分. 所有题目中使用的定理或者命题需要注明.

请从第 1 题 -第 6 题中选择五题 作答. 如果全做，取分数最高的五题计入总分. 第 7-11 题为必答题.

1. (13 分) 求微分方程 $(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$ 的通解.

2. (13 分) 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通解.

3. (13 分) 求微分方程 $x(\frac{dy}{dx})^2-2y\frac{dy}{dx}+4x=0$ 的通解.

4. (13 分) 求微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx}=\begin{pmatrix}3 & 4 & -10\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -5\end{pmatrix}\mathbf{y}$$

的基解矩阵.

5. (13 分) 已知 $y=x$ 是方程

$$y''+\frac{x}{1+x^2}y'-\frac{y}{1+x^2}=0$$

的解, 求该方程的通解.

6. (13 分) 用幂级数方法求解微分方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$. (用其它方法求解不给分)

7. (15 分) 考虑微分方程

$$y''+4y'+3y=f(x), \tag{1}$$

其中 $f(x)$ 在 $[a,\infty)$ 上连续，且满足 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$. 证明：对方程(1)的任意解 $y(x)$, 均有

$$\lim_{x\to+\infty}y(x)=0.$$

8. (15 分) 判断微分方程

$$\begin{cases}\dot{x}=x-y\\ \dot{y}=1-xy\end{cases}$$

奇点的类型，并画出奇点附近的相图.

9. (15 分) 讨论方程组

$$
\begin{cases}
\dot{x} = (\epsilon x + 4y)(z+1) \\
\dot{y} = (-x + \epsilon y)(z+1) \\
\dot{z} = -z^3
\end{cases}
$$

零解的稳定性, 其中 $\epsilon \neq 0$.

10. (20 分) 考虑微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y + (\lambda + q(x))\sin^2 y, \quad y(0,\lambda) = y_0 \tag{2}$$

其中 $q(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

(a) 证明：对于任意的 $\lambda \in (-\infty,+\infty)$, 方程(2)在区间 $[0,1]$ 上存在唯一解 $y=\varphi(x,\lambda)$.

(b) 对于任意的 $x\in[0,1]$, $y=\varphi(x,\lambda)$ 关于 $\lambda\in(-\infty,+\infty)$ 是否连续可微? 为什么?

(c) 令 $\omega(\lambda)=\varphi(1,\lambda)$. 证明: $\omega(\lambda)$ 在区间 $-\infty<\lambda<+\infty$ 上是严格递增的.

11. (20 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调递增, 证明:

(a) 对于任意给定的常数 C, 初值问题

$$\frac{dy}{dx} = -f(y) + C, \quad y(x_0) = y_0 \tag{3}$$

在 $[x_0,+\infty)$ 上存在解. (提示：为说明 $[x_0,+\infty)$ 是极大右行区间, 可以分 $C > \sup\{f(x): -\infty < x < +\infty\}$, $C < \inf\{f(x): -\infty < x < +\infty\}$ 及 $\inf\{f(x): -\infty < x < +\infty\} \le C \le \sup\{f(x): -\infty < x < +\infty\}$ 三种情况考虑)

(b) 证明：在 $[x_0,+\infty)$ 上解是唯一的.