整理：李轩宇
授课教师：陈卿、张永兵

2020 秋数学分析 B3 期中考试

1.(15 分)

设$\{\lambda_n\}$是一个正数列，$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n=+\infty$，数列$\{x_n\}$收敛到实数$a$。求如下数列的极限：

$$y_n=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n}$$

2.(15 分)

设函数f是2π周期的k阶连续可微函数$(k\geq 1), a_n(n\geq 0), b_n(n\geq 1)$是$f$的 Fourier 系数。证明

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^k}\right), b_n=o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

3.(20 分)

设f是有界闭区间$[a,b]$上的连续函数且$f(a)=f(b)=1$.

（1）证明$f^{-1}(1)=\{x\in[a,b]|f(x)=1\}$是闭集；

（2）证明集合$D=[a,b]\backslash f^{-1}(1)$是一个开集；

(3) 设D分解为一列两两无交的开区间（有限或者可数）$\{(a_n,b_n)|n=1,2,\cdots\}$的并集，证明：数集$E=\{b_n-a_n|n=1,2,\cdots\}$有最大元.

4.(20 分)

设f是区间[0,1]上的黎曼可积函数，且f在$x=0$连续。定义函数列f_n如下：

$$f_n(x)=\int_0^x f(t^n)dt, x\in[0,1], n=1,2,\cdots.$$

（1）求函数列$\{f_n\}$的极限（不需要证明）；

（2）证明函数列$\{f_n\}$一致收敛.

5.(15 分)

设$\{x_n\}$是一个有界数列，E是它的极限点集。若$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$，证明$E$是一个闭区间（包含独点集的情形）。

6.(15 分)

设幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径是 1，且$na_n\to 0(n\to\infty)$。记$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，证明：若$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=A$，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=A$.