授课教师：李思敏、许斌
整理：付杰

中科大2020年秋季学期数学分析(A3)期中考试

考试时间: 11月17日上午9:45—11:45

姓名：______________ 学号：__________________ 得分：_______

$\mathbb{R}$为实直线，$\mathbb{R}^n$为n维欧氏空间.

1. (18分) 判断如下三个级数是否收敛:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{4^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{\ln n}}.$$

并对其中收敛的级数求和.

2. (8分) 设$\alpha>0$. 讨论无穷乘积$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$的收敛性.

3. (12分) 设$(a,b)\in\mathbb{R}^2$, 写出满足下面条件的(a,b)所构成的集合, 并说明理由.

(3A). 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a^n/n^b$绝对收敛.

(3B). 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a^n/n^b$条件收敛.

4. (18分) 写出幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$在$\mathbb{R}$上的收敛点集$D$, 在每个$D$中的点处判断其绝对收敛性, 讨论该级数在$D$上的一致收敛性. 均需说明理由.

5. (10分) 设f为$\mathbb{R}$上的实值连续函数, 且$|f(x)|\leq 1/(1+x^2)$. 证明函数

$$g(x):=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)$$

为$\mathbb{R}$上周期1的连续函数. 此处, 称级数$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n$收敛, 是指存在实数$S$, 对于任意$\epsilon>0$, 存在正整数$N$, 对于任意$k,\ell>N$成立

$$\left|\sum_{n=-k}^{\ell}c_n-S\right|<\epsilon.$$

6. (8分) 设$p \in \mathbb{R}$, 判断级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$的敛散性. 若级数收敛, 还要判断其绝对收敛性质.

7. (16分) 设f是$[0,1]$上的有界实值函数并且黎曼可积.

7A. 证明$|f|$亦在$[0,1]$上Riemann 可积. 在此引进记号, $[f] = \int_0^1 |f(x)|\,dx$.

7B. 证明: 任给$\epsilon > 0$, 存在$[0,1]$上的连续函数g, 使得$[f-g] < \epsilon$.

7C. 证明: 任给$\epsilon > 0$, 存在$[0,1]$上的多项式P, 使得$[f-P] < \epsilon$.

7D. 证明: 存在由$[0,1]$区间上的某些多项式构成的可数集合$\mathcal{P}$, 对于任意$[0,1]$上实值Riemann 可积函数g和任意$\epsilon > 0$, 存在$Q \in \mathcal{P}$使得$[g-Q] < \epsilon$.

注意: 可以使用前面的结论证明后面小问的, 每问独立评分.

8. (10分) 证明: 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{3^n - 2^n}$在$\mathbb{R}$上一致收敛于一光滑函数, 将后者记作$S(x)$. 判断$S(x)$在原点附近能否展开成它的Maclaurin 级数并说明理由.