整理：肖宇
授课教师：任广斌、罗罗

中国科学技术大学

2020－2021学年第一学期期中考试试卷

考试科目：数学分析A1　　　　得分：

学生所在系：　　　　姓名：　　　　学号：

注意事项:

1.答卷前、考生务必将姓名、学号等填写清楚.

2.本考试为闭卷考试, 共十道大题, 每题10分, 总分100分, 考试时间120分钟.

3.解答请写在试题后的空白处, 若写不下, 可写在试题的背面, **写在草稿纸上无效**.

2020 年 11 月 29 日

得分	

一、假设

$$\lim_{n\to\infty}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|)=1.$$

证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在.

得分	

二、已知

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3.$$

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

得分	

三、证明:　函数$\sqrt{x}$在$(0,+\infty)$一致连续; 函数$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$非一致连续.

得分	

四、Riemann 函数$R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ \frac{1}{q}, & x=\frac{p}{q}(q>0,p,q\text{为互素整数}),\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$ 是周期为1的函数.

证明: $R(x)$处处不可导.

得分	

五、设$f \in C^2(\mathbb{R})$, f具有反函数g, 而且

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 2.$$

设$F(x) = g(x^2)$, 求$F''(0)$.

得分	

六、设

$$A=\left\{\alpha\in\mathbb{R}:\quad f_\alpha\in C^1(\mathbb{R})\right\},$$

其中

$$f_\alpha(x)=\begin{cases}x^\alpha\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

求出集合A(需说明理由).

得分	

七、设函数$f(x)$在区间$(0,1)$内连续，且存在两两互异的点$x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0,1)$，使得

$$\alpha = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < \frac{f(x_3) - f(x_4)}{x_3 - x_4} = \beta.$$

证明：对任意$\lambda \in (\alpha, \beta)$，存在互异的点$x_5, x_6 \in (0,1)$，使得

$$\lambda = \frac{f(x_5) - f(x_6)}{x_5 - x_6}.$$

得分	

八、设$f \in C^2(\mathbb{R})$是凸函数，证明

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad \forall x, \quad x_0 \in \mathbb{R}.$$

得分	

九、设函数$f(x)$在区间$[0,2]$上有二阶连续导数，$f'(0)=1$, $f''(0)\neq 0$, 且

$$0<f(x)<x, \qquad \forall\, x\in(0,2).$$

令$x_{n+1}=f(x_n)$, $x_1\in(0,2)$. 求数列$\{nx_n\}_{n=1}^{\infty}$的极限.

得分	

十、设$\alpha > 1$, 函数$f : (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$可微, 求证存在趋于无穷的正数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得

$$f'(x_n) < f(\alpha x_n) .$$