2020春《李群与李代数及其表示》–期末考试（线上）

问题 1 (10分). 设J为李代数L的理想，I是J的理想，并且对于J上的任何导子δ都有$\delta(I) \subseteq I$，证明：I是L的一个理想。

问题 2 (25分). 令$\mathfrak{g} = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid X + X^t = 0\}$为所有3阶反对称方阵的集合。

1). 证明$\mathfrak{g}$是一般线性李代数$\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$的一个3维子代数；

2). 李代数$\mathfrak{g}$是否同构与$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$，若是请给出一个同构，若不是请说明；

3). 作为子代数$\mathfrak{g}$伴随作用在$\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$上，试把$\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$分解成不可约$\mathfrak{g}$-模的直和。

问题 3 (15分). 1). 证明：若李代数L的子代数H是幂零自正规的（即$N_L(H) = H$），则H一定是极大幂零子代数；

2). 试说明任意单李代数都存在极大幂零子代数不是自正规的。

问题 4 (10分). 证明：任意半单李代数可以由两个元素生成。

问题 5 (15分). 设Φ是欧氏空间E的根系，$\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$是$\Phi$的根基。 E上线性变换τ使得任意$\beta \in \Phi$有$\tau\sigma_\beta\tau^{-1} = \sigma_{\tau(\beta)}$。证明：

1). 若$\tau(\Delta) \subseteq \Phi$，则有$\tau(\Phi) = \Phi$；

2). 若$\Delta' = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\} \subseteq \Phi$满足：对任意$1 \le i, j \le l$有$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$，则$\Delta'$也是$\Phi$的根基。

问题 6 (25分). 设根系Φ的Cartan矩阵为$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$，并且单根$\alpha$和$\beta$满足 $2(\alpha, \alpha) = 2 = (\beta, \beta)$.

1). 求出α和β之间可能的夹角；

2). 求出Φ的所有正根；

3). 若李代数L的根系是Φ，求出L的维数；

4). 求出关于根基$\Delta = \{\alpha, \beta\}$的基本支配权；

5). 试找出$\lambda \in \Lambda^+$以及$\gamma \in \Delta$使得$\lambda + \gamma \notin \Lambda^+$。