授课教师：陈小伍
整理：周文斌

姓名:________ 学号:________ 所在院系:________

密 封 线 内 不 要 答 题

线性代数(B2)期中考试

2020年12月13日

题号	一	二	三	四	五	六	总　分
得分							
复查							

注：解答题需给出详细步骤，按步骤给分。

一、 填空（每空4分，共40分）

(1). $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2020} =$ ________。

(2). n阶行列式$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$ $2^{n+1}-1$。

(3). 方阵$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$的逆方阵为________。

(4). 设方阵$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$的代数余子式满足$A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1$。则$\det(A) =$________。

(5). 假设A的伴随矩阵为$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$。则$A =$ ________。

(6). 设$P\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$。则$P =$ ________。

(7). 设$n \geq 2$，$M_n(\mathbb{C})$为全体n阶复方阵组成的复线性空间。考虑线性变换

$$\mathcal{A}\colon M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow M_n(\mathbb{C})$$

满足$\mathcal{A}(X) = X^t + X$，其中X为任意方阵，X^t为其转置。考虑复合线性变换$\mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \circ \mathcal{A}$。则$\mathcal{A}$ 的特征多项式为________________，变换$\mathcal{A}^2$的最小多项式为________________。

(8). 设$\mathbb{C}_3[x]$为全体次数不超过3（包括3）复系数多项式组成的复线性空间。考虑线性变换

$$\mathcal{B} = (x-1)\frac{d}{dx}\colon \mathbb{C}_3[x] \longrightarrow \mathbb{C}_3[x].$$

则$\mathcal{B}$的所有特征值为________________，相应的（在$\mathbb{C}_3[x]$中的）特征向量为________________。

二、(10分) 设A为$m \times n$实矩阵，A^t为其转置。考虑子空间$V(A) = \{x \in \mathbb{R}^n_{\mathrm{col}} \mid Ax = 0\}$以及$R(A) = \{A^t y \mid y \in \mathbb{R}^m_{\mathrm{col}}\}$。试证明：$\mathbb{R}^n_{\mathrm{col}} = V(A) \oplus R(A)$.

证

三、(10分) 设B为n阶可逆实方阵。试讨论：是否总存在实方阵A使得$B = A^*$。

四、(20分) 对于任意$A, B \in M_2(\mathbb{C})$，我们定义复线性映射

$$\Psi_{A,B}\colon M_2(\mathbb{C}) \longrightarrow M_2(\mathbb{C}), \quad X \mapsto AXB.$$

(1). 试证明：线性变换$\Psi_{A,B}$是幂零的（即，对于某个n满足$\Psi_{A,B}^n = 0$），当且仅当方阵A或B是幂零的。

(2). 取定$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$以及$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$。记$\Psi_{A,B} = \mathcal{A}$。试证明：复线性变换$\mathcal{A}\colon M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$相似可对角化。

五、(15分) 设V为有限维复线性空间。

(1). 设W_1以及W_2为V的线性子空间，其并$W_1 \cup W_2$也是线性子空间。证明：$W_1 \subseteq W_2$或$W_2 \subseteq W_1$。

(2). 设ϕ_1和ϕ_2为V上的非零复线性函数。证明：存在$\lambda \in \mathbb{C}$使得$\phi_1 = \lambda\phi_2$，当且仅当$\mathrm{Ker}(\phi_1) = \mathrm{Ker}(\phi_2)$。

六、(5分) 论证：是否存在实矩阵A和B，使得$AB=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 9 & 3\end{pmatrix}$与$BA=\begin{pmatrix}7 & -3 & 3\\ 3 & 1 & 1\\ 3 & -7 & 2\end{pmatrix}$同时成立。

一.

(1) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2020}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \cos\frac{5}{3}\pi & -\sin\frac{5}{3}\pi \\ \sin\frac{5}{3}\pi & \cos\frac{5}{3}\pi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix} \cos\frac{5}{3}\pi & -\sin\frac{5}{3}\pi \\ \sin\frac{5}{3}\pi & \cos\frac{5}{3}\pi \end{pmatrix}^{2020} = \begin{pmatrix} \cos\frac{10100}{3}\pi & -\sin\frac{10100}{3}\pi \\ \sin\frac{10100}{3}\pi & \cos\frac{10100}{3}\pi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2}{3}\pi \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{2020} = 2^{2020}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) $D_n = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & & & \\ 1 & 3 & 2 & & \\ & 1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$

按第一行展开：

$$D_n = 3D_{n-1} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & & & \\ & 3 & 2 & & \\ & 1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & & & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3D_{n-1} - 2D_{n-2}$$

$$D_n = \alpha \cdot 2^n + \beta\, 1^n$$

$$\begin{cases} D_1 = 2\alpha + \beta = 3 \\ D_2 = 4\alpha + \beta = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_n = 2^{n+1} - 1.$$

(3)

法一.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & & & 1 & & & \\ 7 & 9 & 1 & & & & & 1 & & \\ 10 & 0 & 0 & 1 & 3 & & & & 1 & \\ 9 & 3 & 0 & 0 & 1 & & & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & -7 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -10 & & & 1 & \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & -9 & & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & -9 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -10 & & & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -3 & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & -2 & 1 & & & \\ & & 1 & & & 11 & -9 & 1 & & \\ & & & 1 & & -1 & 9 & & 1 & -3 \\ & & & & 1 & -3 & -3 & & & 1 \end{array}\right)$$

法二. (A与C可逆) 则

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -C^{-1}BA^{-1} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -3 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C^{-1}BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -3 \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 10 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ -17 & -9 \\ 9 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 9 \\ 1 & -9 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

则 $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -2 & 1 & & O & \\ 11 & -9 & 1 & & \\ -1 & 9 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(4) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & a & b \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow b+4+a-2-2a-b=1$$

$$\Rightarrow a=1$$

$$\det(A) = 2b+8+a-2-4a-2b$$

$$= 6-3a = 3$$

(5) $$\begin{cases} AA^* = |A| \cdot I_3 \Rightarrow A = |A| \cdot (A^*)^{-1} \\ |A|^2 = |A^*| \Rightarrow |A| = \pm i \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 0 & 3 & & 1 & \\ 1 & 2 & 0 & & & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A = \pm i \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(少一个扣 2分)

(6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} P^T = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 3 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & -7 & -14 & 7 & -7 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(7) 法一. $\forall X\in M_n(\mathbb{C})$,

$$\mathcal{A}^2(X)=\mathcal{A}(X^t+X)=(X^t+X)^t+(X^t+X)$$

$$=2(X^t+X)=2\mathcal{A}(X)$$

故 $\mathcal{A}^2=2\mathcal{A}$. 则 $\mathcal{A}$ 可对角化,

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{A}=\{X\in M_n(\mathbb{C})\mid X^t=X\}$$

故 $\mathcal{A}$ 的特征值为 0 和 2. $\mathrm{rank}(\mathcal{A})=\frac{n^2+n}{2}$

则存在 $M_n(\mathbb{C})$ 一组基使 $\mathcal{A}$ 的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2I_{\frac{n^2+n}{2}} & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{A}$ 特征多项式: $\lambda^{\frac{n^2-n}{2}}\cdot(\lambda-2)^{\frac{n^2+n}{2}}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^2$ 最小多项式: $\lambda(\lambda-4)$

(7) 法二: $M_n(\mathbb{C}) = V_1 \oplus V_2$

其中 $V_1 = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T = A \}$

$V_2 = \{ A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^T = -A \}$

且 $\dim V_1 = \frac{1}{2}(n^2+n)$, $\dim V_2 = \frac{1}{2}(n^2-n)$

取 V_1 的基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{\frac{1}{2}(n^2+n)}$, V_2 的基 $\beta_1, \cdots, \beta_{\frac{1}{2}(n^2-n)}$

则 $\mathcal{A}(\alpha_i) = 2\alpha_i$, $i = 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}(n^2+n)$

$\mathcal{A}(\beta_i) = 0$, $i = 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}(n^2-n)$

且 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{\frac{1}{2}(n^2+n)}, \beta_1, \cdots, \beta_{\frac{1}{2}(n^2-n)}\}$ 是 $M_n(\mathbb{C})$ 的一组基.

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{\frac{1}{2}(n^2+n)}, \beta_1, \cdots, \beta_{\frac{1}{2}(n^2-n)}) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{\frac{1}{2}(n^2+n)}, \beta_1, \cdots, \beta_{\frac{1}{2}(n^2-n)}) \begin{pmatrix} 2I_{\frac{1}{2}(n^2+n)} & \\ & O_{\frac{1}{2}(n^2-n)} \end{pmatrix}$$

则 $\mathcal{A}$ 的特征多项式为 $\varphi(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}(n^2-n)} \cdot (\lambda-2)^{\frac{1}{2}(n^2+n)}$.

$\mathcal{A}^2$ 在基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{\frac{1}{2}(n^2+n)}, \beta_1, \cdots, \beta_{\frac{1}{2}(n^2-n)}$ 下矩阵为 $\begin{pmatrix} 4I_{\frac{1}{2}(n^2+n)} & \\ & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{A}^2$ 最小多项式为 $d(\lambda) = \lambda(\lambda-4)$.

(8) $\mathcal{B}(1, x, x^2, x^3) = (0, x-1, 2x(x-1), 3x^2(x-1))$

$$= (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ 的所有特征值: 0, 1, 2, 3

①求0的特征向量

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

解为 $\xi_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则属于0的特征向量为 c_1, $c_1 \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

② 求1的特征向量

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 0 & 2 & \\ & & -1 & 3 \\ & & & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

解为 $\xi_2 = \begin{pmatrix} -c_2 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

则属于1的特征向量为 $c_2(x-1)$, $c_2 \in \mathbb{C}^*$.

③ 2: $c_3(x-1)^2$, $c_3 \in \mathbb{C}^*$

④ 3: $c_4(x-1)^3$, $c_4 \in \mathbb{C}^*$.

二. 证明: 设 $x \in V(A) \cap R(A)$,

则 $\begin{cases} Ax = 0 \\ \exists y \in \mathbb{R}^m_{col},\ x = A^t y \end{cases} \Rightarrow AA^t y = 0$

故 $y^t A A^t y = 0 \Rightarrow (A^t y)^t (A^t y) = 0$

$\Rightarrow A^t y = 0$

$\Rightarrow x = 0$

6分 故 $V(A) \cap R(A) = \{0\}$, 因此 $V(A) + R(A) = V(A) \oplus R(A)$.

又 $\dim V(A) = n - \operatorname{rank}(A)$, $\dim R(A) = \operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$

则 $\dim V(A) + \dim R(A) = n = \dim \mathbb{R}^n_{col}$.

因此 $\dim(V(A) + R(A)) = \dim V(A) + \dim R(A) - \dim(V(A) \cap R(A))$

$= n$

$\Rightarrow V(A) + R(A) = \mathbb{R}^n_{col}$.

10分 综上. $\mathbb{R}^n_{col} = V(A) \oplus R(A)$. $\square$

三. 若存在 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 使 $B=A^*$.

则 $AB=AA^*=\det(A)\cdot I_n$

$\Rightarrow A=\det(A)\cdot B^{-1}$.

而 $\det(A^*)=\det(A)^{n-1}$, 则 $\det(B)=\det(A)^{n-1}$.

故

① 当 n 为偶数时，取 $A=\det(B)^{\frac{1}{n-1}}\cdot B^{-1}$，则

$A\in M_n(\mathbb{R})$ 且 $B=A^*$ (5分)

② 当 n 为奇数且 $\det(B)>0$ 时，取 $A=\det(B)^{\frac{1}{n-1}}\cdot B^{-1}$

则 $A\in M_n(\mathbb{R})$ 且 $B=A^*$ (3分)

③ 当 n 为奇数且 $\det(B)<0$ 时. 此时不存在 $A\in M_n(\mathbb{R})$

使 $B=A^*$，否则，$\det(B)=\det(A)^{n-1}>0$ 矛盾.

(2分)

四. 证明:

(1) "$\Leftarrow$" (3分)

若A或B是幂零的，若A幂零，则$\exists n\in \mathbb{N}^+$.

$A^n=0$，则 $\Phi_{A,B}^n(X)=A^nXB^n=0$, $\forall X\in M_2(\mathbb{C})$

故 $\Phi_{A,B}^n=0$，即 $\Phi_{A,B}$ 是幂零的.

若B是幂零的，类似可证 $\Phi_{A,B}$ 幂零.

"$\Rightarrow$" (7分)

反证，假设A与B都不是幂零的，则$\forall n\in \mathbb{N}^+$.

$$A^n\neq 0,\ B^n\neq 0.$$

设 $\operatorname{rank}(A^n)=r$，$\operatorname{rank}(B^n)=s$. 从而存在

可逆矩阵 P_1, Q_1, P_2, Q_2 使

$$P_1A^nQ_1=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2B^nQ_2=\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取 $X=Q_1\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P_2$，其中$X_1$为 $r\times s$ 阶非零矩阵.

$$\Phi_{A,B}^{n}(X) = A^{n} X B^{n}$$

$$= A^{n} Q_1 \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P_2 B^{n}$$

$$= P_1^{-1} \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2^{-1}$$

$$= P_1^{-1} \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2^{-1} \neq 0$$

即 $\forall n \in \mathbb{N}^{+}$，$\Phi_{A,B}^{n} \neq 0$，与 $\Phi_{A,B}$ 幂零矛盾！

故 A 或 B 是幂零的

(2) $\mathcal{A}$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

(4分)

则 D 的特征多项式为 $\varphi(\lambda) = \lambda^2(\lambda-4)(\lambda+4)$ (2分)

$\mathrm{rank}(D)=2 \Rightarrow$ 特征值 0 的几何重数为 $4-2=2$，

等于代数重数.

特征值 $4, -4$ 的代数重数都是 1，故它们几重 = 代重

因此D可相似对角化，即 $\mathcal{A}$ 可对角化 (4分)

$\square$

五.

证明:

(1) 假设 $W_1 \not\subseteq W_2$ 且 $W_2 \not\subseteq W_1$.

则 $\exists \alpha \in W_1 \setminus W_2$, $\exists \beta \in W_2 \setminus W_1$.

由于 $W_1 \cup W_2$ 为线性子空间，则 $\alpha+\beta \in W_1 \cup W_2$

若 $\alpha+\beta \in W_1$，则 $\beta = (\alpha+\beta) - \alpha \in W_1$，矛盾

若 $\alpha+\beta \in W_2$，则 $\alpha = (\alpha+\beta) - \beta \in W_2$，矛盾

从而 $W_1 \subseteq W_2$ 或 $W_2 \subseteq W_1$

(5分)

(2) "$\Longrightarrow$" (3分)

由于 ϕ_1, ϕ_2 非零，则 $\lambda \neq 0$.

对 $\forall x \in \ker \phi_2$，则 $\phi_1(x) = \lambda \phi_2(x) = 0$

故 $x \in \ker \phi_1$，则 $\ker \phi_2 \subseteq \ker \phi_1$.

对 $\forall x \in \ker \phi_1$，则 $\phi_2(x) = \frac{1}{\lambda}\phi_1(x) = 0$

故 $x \in \ker \phi_2$，则 $\ker \phi_1 \subseteq \ker \phi_1$.

$\Rightarrow \ker \phi_1 = \ker \phi_2$

"$\Leftarrow$" （7分）

由于 ϕ_1, ϕ_2 非零，则 $\mathrm{Im}\,\phi_1 = \mathrm{Im}\,\phi_2 = \mathbb{C}$.

从而 $\dim \ker \phi_1 = \dim \ker \phi_2 = n-1$，$(n = \dim V)$.

取 $\ker \phi_1$ 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-1}$，将其扩充为 V 的一组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，则 $\alpha_n \notin \ker \phi_1$.

由于 $\ker \phi_1 = \ker \phi_2$，则 $\phi_2(\alpha_n) \neq 0$，对 $\forall x \in V$. 设

$$x = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + \cdots + a_n \alpha_n, \quad a_i \in \mathbb{C}$$

则

$$\phi_1(x) = a_n \phi_1(\alpha_n)$$

$$\phi_2(x) = a_n \phi_2(\alpha_n)$$

$$\Rightarrow \phi_1(x) = a_n \cdot \frac{\phi_1(\alpha_n)}{\phi_2(\alpha_n)} \phi_2(\alpha_n) = \frac{\phi_1(\alpha_n)}{\phi_2(\alpha_n)} \phi_2(x)$$

取 $\lambda = \frac{\phi_1(\alpha_n)}{\phi_2(\alpha_n)}$，则 $\phi_1 = \lambda \phi_2$

$\square$

(**期中考试最后一题**) 论证：是否存在实矩阵 A 和 B，使得 $AB=\begin{pmatrix}7&-1\\9&3\end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix}7&-3&3\\3&1&1\\3&-7&2\end{pmatrix}$.

证明 首先观察到 A 需要是 2×3 阶实矩阵，B 需要是 3×2 阶实矩阵. 并且

$$\operatorname{rank}(AB)=2, \operatorname{rank}(BA)=2.$$

则

$$2=\operatorname{rank}(AB)\leq \operatorname{rank}(A)\leq 2\Rightarrow \operatorname{rank}(A)=2.$$

$$2=\operatorname{rank}(AB)\leq \operatorname{rank}(B)\leq 2\Rightarrow \operatorname{rank}(B)=2.$$

即 A 是行满秩的，B 是列满秩的. 注意到

$$BA=\begin{pmatrix}-3&3\\1&1\\-7&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&0\\\frac{8}{3}&0&1\end{pmatrix}$$

设 $B=\begin{pmatrix}-3&3\\1&1\\-7&2\end{pmatrix}P$, 其中 $P\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, 则 $A=P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&1&0\\\frac{8}{3}&0&1\end{pmatrix}$. 则

$$AB=P^{-1}\begin{pmatrix}0&2\\-15&10\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}7&-1\\9&3\end{pmatrix}. \tag{1}$$

注意到矩阵 $\begin{pmatrix}0&2\\-15&10\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\begin{pmatrix}7&-1\\9&3\end{pmatrix}$ 是复相似的，从而也是实相似的，故上述的 P 是存在的. 亦即存在实矩阵 A,B 满足题意.

注 1 或者可以直接求出满足条件 *(1)* 的可逆实矩阵 P. 设 $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，则

$$\begin{pmatrix}0&2\\-15&10\end{pmatrix}P=P\begin{pmatrix}7&-1\\9&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}7a+9b-2c=0\\a-3b+2d=0\\5a-c+3d=0\\15b-c-7d=0\end{cases}$$

解得一个解 $a=-1,b=1,c=1,d=2$. 取 $P=\begin{pmatrix}-1&1\\1&2\end{pmatrix}$, 则 $P\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, 则可取

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&1\\3&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\\3&-1\end{pmatrix}$$